1. Perusmääritelmiä, -käsitteitä ja -tuloksia

Jatkossa teemme aina seuraavat oletukset:

1.1. **Oletus.** *Tilajoukko* $S \neq \emptyset$ on äärellinen tai numeroituva joukko (englanniksi *state space*).

(1) Esimerkissä 0.12 käytimme tilajoukkona $S = \{\text{pouta, sade}\} = \{0, 1\}$.
(2) Käytännössä koko ajan tällä kurssilla tilajoukko S on jokin seuraavista joukoista

$$S = \begin{cases} \{0, 1, \dots, d\}, \\ \mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}, \\ \mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}. \end{cases}$$

1.2. **Oletus.** *Tilat* ovat tilajoukon alkioita $i, j \in S$.

1.3. **Oletus.** *Ajanhetket* ovat luonnollisia lukuja $n, m = 0, 1, 2, \dots$

1.4. **Oletus.** *Satunnaismuuttujat* ovat ajanhetkillä indeksöityjä kuvauksia tn-avaruudelta tila-avaruuteen, eli $X_0, X_1, X_2, \dots \in S$. Esimerkissä 0.12 satunnaismuuttuja X_n = n:nnen päivän sää $\in \{\text{pouta, sade}\}$.

1.5. **Määritelmä.** Sanomme, että satunnaismuuttujajono $(\, X_n\, ;\, n = 0, 1, 2, \dots)$ on (diskreettiaikainen) *stokastinen prosessi* (englanniksi *stochastic process*)

1.6. **Määritelmä.** Stokastinen prosessi (X_n) on (stationaarinen) *Markovin ketju* (englanniksi *Markov chain*), jos kaikilla ajanhetkillä n, m ja tiloilla $i, j \in S$ on voimassa

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\,(\, X_{n+1} = j \,|\, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\,) \\ &= \mathbf{P}\,(\, X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\,) \end{aligned} \tag{1.7}$$

sekä lisäksi on voimassa *siirtymätodennäköisyyksille*

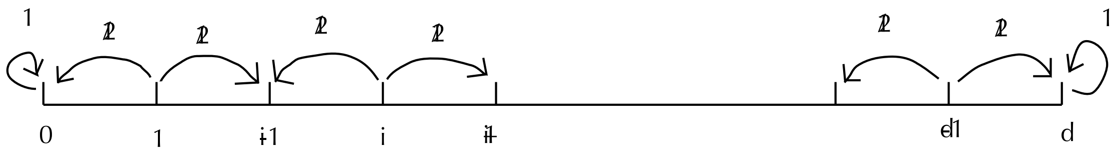
$$p_{ij} = \mathbf{P}\,(\, X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\,) = \mathbf{P}\,(\, X_{m+1} = j \,|\, X_m = i\,) \tag{1.8}$$

Käytämme jatkossa lyhennettä *MK*, kun puhumme Markovin ketjuista. Markovin ketjun määritelmän ensimmäistä ehtoa (1.7) sanotaan *Markov-ominaisuudeksi* (englanniksi *Markov property*) tai *"unohtavaisuusominaisuudeksi"*. Toinen ehto on niin sanottu *stationaarisuusehto*, mikä sanoo että siirtymätodennäköisyydet eivät riipu lainkaan ajasta n vaan ainoastaan tiloista i ja j.

Satunnaismuuttujan X_0 jakaumaa eli todennäköisyyksiä

$$p_i := \mathbf{P}\,(\, X_0 = i\,)\,, \quad i \in S \tag{1.9}$$

nimitetään Markovin ketjun *alkujakaumaksi*.



KUVA 2. Satunnaiskulku äärellisellä välillä

1.1. **Esimerkkejä.**

1.10**. Esimerkki.** Tarkastellaan aluksi yksinkertaista, mutta tärkeää syntymä- ja kuolemaketjua (lyh. SK-ketju).

(1) SK-ketjun tilajoukkona $S = \mathbb{N}$ tai äärellinen joukko $S = \{0, 1, \ldots, d\}$.
(2) Tapauksessa $S = \mathbb{N}$ siirtymätodennäköisyydet p_{ij} toteuttavat ehdot, kun $i \geq 1$,

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i, & \text{kun } j = i + 1, \\ q_i = 1 - p_i, & \text{kun } j = i - 1, \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kun $i = 0$, niin $p_{00} = q_0 = 1 - p_0$ ja $p_{01} = p_0$. Siirtymätodennäköisyydet määräytyvät siis todennäköisyyksistä p_i, mikä kuvaa siirtymistä seuraavaan tilaan (syntymätodennäköisyys) ja komplementtitapahtumien todennäköisyyksistä $q_i = 1 - p_i$. (kuolematodennäköisyys)

1.11**. Esimerkki.** SK-ketjun erikoistapauksena saamme satunnaiskulun luonnollisilla luvuilla $\mathbb{N}$. Satunnaiskulku luonnollisia luvuilla $\mathbb{N}$ on SK-ketju, jossa $S = \mathbb{N}$, $p_i = p$ kaikilla $i \geq 1$ ja $p_0 = 0$, eli siirtyminen luvuilla eteenpäin tapahtuu todennäköisyydellä p ja alas todennäköisyydellä $q := 1 - p$, kunnes saavumme ”reunalle” eli tilaan 0, mistä emme enää poistu.

1.12**. Esimerkki.** Vastaavasti SK-ketjun erikoistapauksena saamme satunnaiskulun äärellisellä välillä. Satunnaiskulku äärellisellä välillä on SK-ketju, jossa $S = \{0, 1, \ldots, d\}$, $p_i = p$ ja $q_i = q$ kaikilla $1 \leq i < d$ ja $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_d = 1$ ja $q_d = 0$. Tulkinta satunnaiskululle on muuten sama kuin satunnaiskululle $\mathbb{N}$:llä, paitsi nyt ”reunatiloja”on kaksi: vasen reuna 0 ja oikea reuna d. Välillä kuljemme todennäköisyydellä p eteenpäin ja todennäköisyydellä q taaksepäin, kunnes saavumme ”reunalle” eli joko tilaan 0 tai d, mistä emme sitten enää poistu.

1.13**. Esimerkki.** [Hardyn–Weinbergin malli] Seuraava Markovin ketju on peräisin Godfrey Harold Hardylta ja Wilhelm Weinbergiltä vuodelta 1908. Malli liittyy perinnöllisyysbiologiaan.

Tarkastellaan suurta populaatiota, jonka kullakin yksilöllä on eräs geenipari ja tästä geenistä on kaksi tyyppiä (*alleelia*) A ja a.

Oletamme, että aina kahden yksilön pariutuessa, kumpikin *vanhemmista* siirtää satunnaisesti toisen geeneistä jälkikasvulleen. Lisäksi oletamme, että paritumiskumppani valitaan satunnaisesti koko populaatiosta. Tässä mallissa voime pitää tilajoukkona S pareja $\{AA, Aa, aa\}$.

Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että kukin yksilö saa tarkalleen yhden jälkeläisen. Merkitsemmekin satunnaismuuttujajalla X_n n:nnen sukupolven jälkeläisen (joka on siten hyvin määrätty) geenitilaa (siis $X_n \in S$).

Tarvitsemme vielä siirtymätodennäköisyydet p_{ij} kun $i, j \in S$. Oletetaan, että koko populaation koko on N yksilöä. Oletetaan, että geenipari AA on yhteensä $N(AA)$ yksilöllä. Merkitään vastaavasti $N(Aa)$:lla ja $N(aa)$:lla geeniparin Aa ja aa omaavien yksilöiden lukumääriä. Merkitään suhteita $p := N(AA)/N$, $q := N(Aa)/N$ ja $r := N(aa)/N$. Koko populaatiossa A-alleelien osuus on siis $P = p + q/2$ ja a-alleelien osuus on $Q = r + q/2$.

Kun kaksi satunnaisesti valittua yksilöä pariutuu, niin todennäköisyys AA-geeniparille on siis P^2, Aa-geeniparille on $2PQ$ (huomaa että järjestyksellä ei ole väliä) ja aa-geeniparille on Q^2. Seuraavassa sukupolvessa A-alleelien osuus on siis $P^2 + PQ = P(P + Q) = P$ ja siten vastaavasti a-alleelien osuus on $Q^2 + PQ = Q$. Siispä alleelien osuus säilyy pariutumisen jälkeen samana eli jos P_n on A-alleelien osuus sukupolvessa n, niin $P_n = P$.

Kuinka geeniparien osuus muuttuu pariutuessa? Tarkastellaan AA-parien osuutta. Merkitään geeniparin AA osuutta n:ssä sukupolvessa luvulla p_n. Tiedämme jo, että $p_0 = p$ ja $p_1 = P_0^2 = P^2$. Koska $p_2 = P_1^2 = P^2$, niin $p_2 = p_1$. Käyttämällä induktiota, voimme todeta, että $p_n = p_1$ jokaisella $n \geq 1$. Vastaavasti voimme päätellä, että kunkin geeniparien osuudet populaatiossa pysyvät samoina ensimmäisen pariutumisen jälkeen.

Oletetaan siis, että ainakin yksi pariutuminen on tapahtunut, eli oletamme, että geeniparien suhde on $p = P^2$, $q = 2PQ$ ja $r = Q^2$. Jos X_n on vanhemman geenitila ja se pariutuu satunnaisen partnerin kanssa, niin esimerkiksi

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = Aa \,|\, X_n = AA \right) = \mathbf{P}\left(\text{partnerilla on a-alleeli} \right) = Q$$

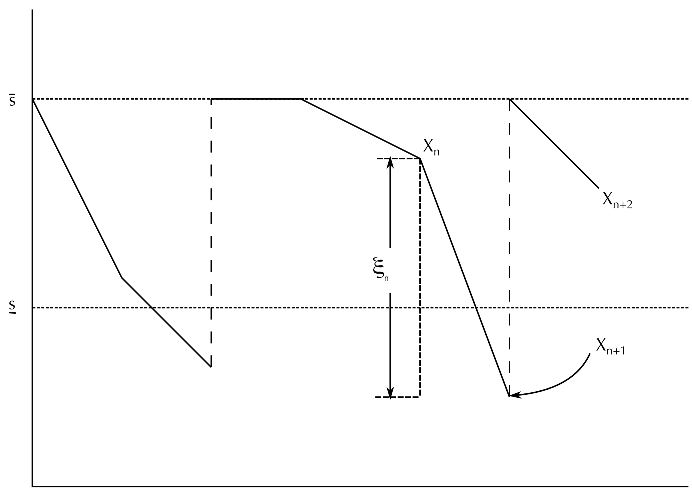
ja

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_{n+1} = Aa \,|\, X_n = Aa \right) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\left(\text{partnerilla on a-alleeli} \right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\left(\text{partnerilla on A-alleeli} \right) = \frac{P + Q}{2}\end{aligned}$$

saamme siis siirtymätodennäköisyyksiksi

	AA	Aa	aa
AA	P	Q	0
Aa	$P/2$	$(P+Q)/2$	$Q/2$
aa	0	P	Q

1.14. **Esimerkki** (Varastomalli). Esitellään vielä yksinkertainen varastomalli. Olkoon $X_n :=$ ”varaston koko n:ntenä päivänä”. Tilajoukkona voimme pitää väliä $\{0, 1, \ldots, \bar{s}\}$, missä varaston maksimikokoa merkitsemme luvulla $\bar{s}$. Kuinka varaston koko muuttuu? Tässä mallissa ajattelemme, että varastosta siirretään tavaraa kulloisenkin kysynnän mukaan (eli jos kukaan ei tavaraa tarvitse n:ntenä päivänä, niin kooko pysyy samana ja jos kokonaiskysyntä ξ_n on k kappaletta, niin varaston koko pienenee k:lla)



Kuva 3. Varastomallin kaavio

Ensimmäinen versio voisi siis olla

$$X_{n+1} = X_n - \xi_n.$$

Tämä malli ei kuitenkaan ole kovin järkevä, sillä jos varastossa ei ole riittävästi tavaraa vastaamaan kysyntää, niin varaston koko ei pysy tilajoukossamme. Yksinkertainen tapa mallintaa tämä on ottaa alarajakoko $\underline{s}$, mikä on riittävän suuri, että kysyntä ei kasva sitä suuremmaksi. Varaston koon tippuessa alarajan alapuolelle varasto täytetään ääriään myöten, jolloin seuraavana päivänä koko onkin $\bar{s} - \xi_n$. Mallinnammekin varaston koon seuraavasti

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_n & \text{kun } X_n > \underline{s}, \\ \bar{s} - \xi_n, & \text{kun } X_n \leq \underline{s} \end{cases}$$

Jos oletamme, että kysyntää kuvaavat satunnaismuuttujat $\{\ \xi_n :\ n \in \mathbb{N}\ \}$ ovat samoin jakautuneita ja riippumattomia, niin voimme osoittaa, että varastomalli on Markovin ketju. Oletamme seuraavassa yksinkertaisuuden vuoksi, että $X_0 = \bar{s}$, mutta mikä tahansa muukin tila kävisi. Tärkeintä on, että satunnaismuuttuja X_0 on riippumaton kysynnästä millä tahansa ajanhetkellä.

Voimme näyttää induktiolla ajanhetken n suhteen, että varaston koko X_n riippuu vain kysynnästä ajanhetkinä $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (sekä yleisesti alkutilasta X_0). Kun $n = 1$, niin $X_1 = \bar{s} - \xi_0$, joten X_1 riippuu vain kysynnästä ajanhetkellä 0. Jos oletamme, että X_n riippuu kysynnästä vain ajanhetkillä $k = 0, 1, \ldots, n-1$, niin mallin mukaan X_{n+1} riippuu varaston koosta X_n ja kysynnästä ξ_n hetkellä n. Siipä induktio-oletuksen nojalla X_{n+1} riippuu vain kysynnästä ajanhetkillä $k = 0, 1, \ldots, n$.

Osoitimme juuri, että X_n riippuu vain ennen ajanhetkeä n tapahtuneesta kysynnästä. Koska oletimme, että satunnaismuuttujat $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ovat keskenään riippumattomia, niin X_n on riippumaton kysynnästä ξ_n. Lisäksi mallin mukaan varaston koon hetkellä $n+1$ selvittämiseksi tarvitsemme vain tietoa varaston koon hetkellä n, joten havaitsemme helposti (HT. mieti yksityiskohdat tämän osoittamiseksi), että malli on Markovin ketju.

Mitä ovat nyt siirtymätodennäköisyydet? Kun $i > \underline{s}$, niin

$$p_{ij} = \mathbf{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i \right) = \mathbf{P}\left(X_n - \xi_n = j \mid X_n = i \right)$$

Koska tiedämme, että $X_n = i$, niin oikea puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{P}\left(X_n - \xi_n = j \mid X_n = i \right) = \mathbf{P}\left(i - \xi_n = j \mid X_n = i \right) = \mathbf{P}\left(\xi_n = i - j \right).$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa satunnaismuuttujien X_n ja ξ_n riippumattomuudesta. Jos oletamme, että satunnaismuuttujan ξ_n jakauma on $\mathbf{P}\left(\xi_n = k \right) = a_k$, niin siirtymätodennäköisyys p_{ij} tapauksessa $i > \underline{s}$ on siis

$$p_{ij} = \mathbf{P}\left(\xi_n = i - j \right) = a_{i-j}$$

Vastaavasti, kun $i \le \underline{s}$, niin

$$p_{ij} = \mathbf{P}\left(\bar{s} - \xi_n = j \right) = a_{\bar{s}-j}$$

1.2. **Tapahtumien todennäköisyyksien laskeminen.** Palautetaan mieleen, että Markovin ketjun (X_n) *alkujakauman* määräävät todennäköisyydet

$$p_i := \mathbf{P}\left(X_0 = i \right), \quad i \in S.$$

Alkujakauma kuvaa tietoa prosessin lähtötilanteesta. Usein tarkastelemme erikoistapausta, missä ketju (X_n) alkaa aina tietystä tilasta i. Tällöin alkujakauma on $p_i = 1$, $p_j = 0$ kun $j \neq i$.

Alkujakauman ja siirtymätodennäköisyyksien p_{ij} avulla voimme määrätä kaikkien Markovin ketjuun liittyvien tapahtumien todennäköisyydet. Tapahtuman

$$\{X_0 = i_0, X_1 = i_1 \dots, X_n = i\}$$

todennäköisyys saadaan ehdollistamalla ja soveltamalla Markov-ominaisuutta (1.7). Tällaista tapahtumaa nimitämme myös *polkutapahtumaksi*, sillä se kuvaa kuinka ketju kulkee lähtöhetkestä 0 ajanhetkeen n pitkin annettua polkua $(i_0, \dots, i_{n-1}, i)$. Polkutodennäköisyys onkin seuraavan lauseen sisältö.

1.15. **Lause.** *Kullakin ajanhetkellä* $n \geq 1$ *polun* $(i_0, \dots, i_n)$ *todennäköisyys on*

$$\mathbf{P}\,(\,X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\,) = p_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \dots p_{i_{n-1},i_n}. \tag{1.16}$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla ajan n suhteen. Kun $n = 1$, niin merkitsemme $A = \{X_0 = i_0\}$ ja $B = \{X_1 = i_1\}$. Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla

$$\mathbf{P}\,(\,AB\,) = \mathbf{P}\,(\,A\,)\,\mathbf{P}\,(\,B \,|\, A\,)$$

Koska $AB = \{X_0 = i_0, X_1 = i_1\}$, $\mathbf{P}\,(\,A\,) = \mathbf{P}\,(\,X_0 = i_0\,) = p_{i_0}$ ja $\mathbf{P}\,(\,B \,|\, A\,) = \mathbf{P}\,(\,X_1 = i_1 \,|\, X_0 = i_0\,) = p_{i_0,i_1}$, niin

$$\mathbf{P}\,(\,X_0 = i_0, X_1 = i_1\,) = \mathbf{P}\,(\,A\,)\,\mathbf{P}\,(\,B \,|\, A\,) = p_{i_0} p_{i_0,i_1},$$

eli väite on osoitettu, kun $n = 1$.

Oletamme nyt, että identiteetti (1.16) on voimassa. Induktioperiaatteen mukaan on osoitettava että väite on voimassa myös ajanhetkellä $n+1$. Merkitään nyt $A = \{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\}$ ja $B = \{X_{n+1} = i_{n+1}\}$. Induktio-oletuksen nojalla

$$\mathbf{P}\,(\,A\,) = p_{i_0} p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n}.$$

Koska Markov-ominaisuuden (1.7) mukaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\,(\,B \,|\, A\,) &= \mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\,) \\
&= \mathbf{P}\,(\,X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n\,) = p_{i_n,i_{n+1}},
\end{aligned}$$

niin polkutodennäköisyys

$$\mathbf{P}\,(\,X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1}\,) = \mathbf{P}\,(\,AB\,) = p_{i_0} p_{i_0,i_1} \dots p_{i_{n-1},i_n} p_{i_n,i_{n+1}}.$$

Väite seuraa siis induktio-periaatteen nojalla. □

1.17. **Esimerkki** (Jatkoa esimerkkiin 0.12)**.** Oletetaan, että tänään on pouta ja aika alkaa tästä päivästä. Oletamme, siis että $p_0 = \mathbf{P}\,(\,X_0 = 0\,) = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,(\,\text{tänään pouta, huomenna ja ylihuomenna sataa}\,) \\
&= p_0 p_{01} p_{11} \approx 1 \times 0,398 \times 0,834 \approx 0,33.
\end{aligned}$$

Usein emme tiedä ketjun kulkemaa polkua kokonaan vaan joitakin osia siitä. Tätä varten otamme käyttöön merkinnän

$$p_{ij}^{(m)} := \mathbf{P}\,(\,X_m = j \mid X_0 = i\,)\,, \quad i, j \in S, m \in T. \tag{1.18}$$

Tämä kuvaa siirtymätodennäköisyyttä tilasta i tilaan j, kun aikaa kuluu m yksikköä. Huomaamme, että tämä yleistää siirtymätodennäköisyyden p_{ij}, sillä

$$p_{ij}^{(1)} = \mathbf{P}\,(\,X_1 = j \mid X_0 = i\,) = p_{ij}. \tag{1.19}$$

Lisäksi, kun $m = 0$, niin

$$p_{ij}^{(0)} = \mathbf{P}\,(\,X_0 = j \mid X_0 = i\,) = [\,i = j\,] = \delta_{ij}. \tag{1.20}$$

Saadaksemme käytännöllisen merkinnän sekä selkeämmän käsityksen siirtymätodennäköisyyksistä merkitsemme siirtymät matriisimuodossa (tässä $S = \mathbb{N}$)

$$P^{(m)} := (p_{ij}^{(m)})_{i,j} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(m)} & p_{01}^{(m)} & p_{02}^{(m)} & \cdots \\ p_{10}^{(m)} & p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \cdots \\ p_{20}^{(m)} & p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Yleistettyjen siirtymätodennäköisyyksien matriisimerkinnästä näemme välittömästi, että $P^{(0)} = I$ on *identtinen matriisi* ja $P^{(1)} =: P$ on siirtymätodennäköisyyksistä muodostettu matriisi. Osoitammekin seuraavaksi, että $P^{(m)} = P^m$, missä P^m tarkoittaa matriisipotenssia. Lisäksi osoitamme Markov-ominaisuuden yleistyksen.

1.22. **Lause.** *Kaikilla ajanhetkillä m on voimassa identiteetti*

$$P^{(m)} = P^m.$$

Lisäksi Markovin ketjulla on yleistetty Markov-ominaisuus: kaikilla ajanhetkillä n ja m ja tiloilla $i, j \in S$ on voimassa

$$\mathbf{P}\,(\,X_{n+m} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\,) = p_{ij}^{(m)}. \tag{1.23}$$

Todistus. Todistamme väitteen induktiolla. Kun $m = 0$, niin $P^{(0)} = I = P^0$ ja myöskin $\mathbf{P}\,(\,X_n = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\,) = [i = j] = p_{ij}^{(0)}$.

Oletetaan nyt, että väite on osoitettu ajanhetkellä $m-1$, kun $m \geq 1$. Induktio-periaatteen nojalla väitteen osoittamiseksi riittää osoittaa väite ajanhetkellä m. Merkitään

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\} \\ A_2 &:= \{X_n = i\}, \\ A &:= A_1 A_2, \\ B &:= \{X_{n+m} = j\} \quad \text{ja} \\ C_k &:= \{X_{n+1} = k\}. \end{aligned}$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän nojalla

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \sum_k \mathbf{P}(C_k B \mid A) = \sum_k \mathbf{P}(B \mid C_k A)\,\mathbf{P}(C_k \mid A)$$

Nyt induktio-oletuksen nojalla

$$\mathbf{P}(B \mid C_k A) = \mathbf{P}(X_{n+m} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i, X_{n+1} = k) = p_{kj}^{(m-1)},$$

sillä $n + m = (n+1) + (m-1)$. Markov-ominaisuuden nojalla tiedämme puolestaan, että $\mathbf{P}(C_k \mid A) = p_{ik}$. Siispä olemme näyttäneet, että

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(m-1)} = (PP^{(m-1)})_{ij}$$

Koska induktio-oletuksen nojalla $P^{(m-1)} = P^{m-1}$, niin $\mathbf{P}(B \mid A) = (P^m)_{ij}$.

Induktioväiteestä puuttuu enää osoitus sille, että $P^m = P^{(m)}$. Koska $P_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}(B \mid A_2)$ ja aikaisemman laskun perusteella

$$\mathbf{P}(B \mid A_2) = \sum_k \mathbf{P}(B \mid C_k A_2)\,\mathbf{P}(C_k \mid A_2),$$

niin identiteetin $P^m = P^{(m)}$ osoittamiseksi riittää näyttää, että $\mathbf{P}(B \mid C_k A_2) = \mathbf{P}(B \mid C_k A)$ ja $\mathbf{P}(C_k \mid A_2) = \mathbf{P}(C_k \mid A)$. Näistä jälkimmäinen on Markov-ominaisuus. Edellinen saadaan induktio-oletuksesta, sillä

$$p_{ij}^{(m-1)} = \mathbf{P}(B \mid C_k A) = \frac{\mathbf{P}(A_1 A_2 B C_k)}{\mathbf{P}(A_1 A_2 C_k)} = \frac{\mathbf{P}(A_1 B \mid A_2 C_k)}{\mathbf{P}(A_1 \mid A_2 C_k)}$$

kaikilla $i_0, \ldots, i_{n-1} \in S$. Kertomalla nimittäjä $\mathbf{P}(A_1 \mid A_2 C_k)$ ja summaamalla yli $i_0, \ldots, i_{n-1}$ saamme siis

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m-1)} &= p_{ij}^{(m-1)} \sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}} \mathbf{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1} \mid A_2 C_k) \\ &= \sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}} \mathbf{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, B \mid A_2 C_k) = \mathbf{P}(B \mid A_2 C_k). \end{aligned}$$

Tämä osoittaakin lopulta, että $P^m = P^{(m)}$ ja väite on osoitettu. $\square$

Pystymme nyt laskemaan tapahtumien todennäköisyyksiä, vaikka emme tunnekaan koko tapahtumapolkua.

1.24. **Esimerkki** (Jatkoa esimerkkiin 0.12)**.** Oletetaan, että tänään on pouta. Tällöin

$$\mathbf{P}\,(\text{ ylihuomenna sataa} \mid \text{tänään on pouta}) = p_{01}^{(2)} = p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11}$$
$$= p_{01} \times (p_{00} + p_{11}) \approx 0,398 \times (0,602 + 0,834) \approx 0,398 \times 1,436 = 0,378$$

Edellinen lause antaa myös tärkeät Chapmanin–Kolmogorovin yhtälöt.

1.25. **Lause** (Chapmanin–Kolmogorovin yhtälöt)**.** *Kaikilla ajanhetkillä n ja m sekä tiloilla $i, j \in S$ on voimassa*

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \tag{1.26}$$

Todistus. Edellisen lauseen nojalla kaavan (1.26) oikea puoli on

$$\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} = \sum_k (P^n)_{ik}(P^m)_{kj} = (P^n P^m)_{ij} = (P^{n+m})_{ij}.$$

Koska edellisen lauseen nojalla $(P^{n+m})_{ij} = p_{ij}^{(n+m)}$, niin väite seuraa. □

Päätämme perustuloskappaleen yleistämällä alkujakauman. Sanomme, että Markovin ketjun *tilajakauman hetkellä n* määräävät todennäköisyydet

$$\lambda_i^{(n)} = \mathbf{P}\,(\, X_n = i\,)\,, \quad i \in S.$$

Edellisten tulosten avulla tilajakauma on helposti määrättävissä alkujakauman ja siirtymätodennäköisyyksien avulla.

1.27. **Lause.** *Markovin ketjun (X_n) tilajakauma $\lambda^{(n)} = (\lambda_j^{(n)})$ vaakavektorina toteuttaa yhtälön*[5]

$$\lambda^{(n)} = \lambda P^n,$$

kun $\lambda = (p_i)$ on alkujakauma.

Todistus. Suoraan laskemalla

$$\mathbf{P}\,(\, X_n = j\,) = \sum_i \mathbf{P}\,(\, X_0 = i, X_n = j\,) = \sum_i \mathbf{P}\,(\, X_0 = i\,)\,\mathbf{P}\,(\, X_n = j \mid X_0 = i\,)$$
$$= \sum_i p_i p_{ij}^{(n)} = (\lambda P^n)_j.$$

□

[5]Tämä yhtälö on matriisiyhtälö, jossa matriisien λ ja $\lambda^{(n)}$ dimensiot ovat $1 \times (d+1)$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisin dimensio on $(d+1) \times (d+1)$.