Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Stokastiset prosessit
Harjoitus 5
10.06.2008

1. Tarkastellaan heijastelevaa satunnaiskulkua välillä $\{0, 1, \ldots, d\}$ eli kun $p + q = 1$, niin

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{kun } j = i + 1 \text{ ja } i < d \\ q & \text{kun } j = i - 1 \text{ ja } i > 0 \\ 1 & \text{kun } i = 0, j = 1 \text{ tai } i = d, j = d - 1 \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

$a)$ Onko ketju kääntyvä ?

$b)$ Määrää ketjun tasapainojakauma.

2. Olkoon $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ja $S \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ riippumattomia. Näytä laskemalla, että

$$\mathbf{P}(T + S \leq t + s \,|\, T + S > t, T < t) = \mathbf{P}(S \leq s).$$

3. Olkoon $N(t)$ Poissonin prosessi. Oletetaan, että $0 < t < u < v < s$ ovat annettuja lukuja. Mikä on satunnaismuuttujan $N(v) - N(u)$ jakauma ehdolla, että tiedämme $N(s) - N(t) = n$?

4. TP-jakauman yksikäsitteisyys: Oletetaan, että (X_n) on äärellinen ja pelkistymätön ja $\alpha \in S$. Olkoon $\widetilde{\pi}$ jokin tasapainojakauma. Merkitään

$$A_j^{(n)}(k) := \mathbf{P}_j(X_m \neq \alpha \text{ kun } 1 \leq m < n \text{ ja } X_n = k).$$

$a)$ Esitä todennäköisyys $A_j^{(n)}(k)$ osumishetken τ_α ja satunnaismuuttujan X_n avulla ja päättele tästä arvio

$$A_j^{(n)}(k) \leq \mathbf{P}_j(\tau_\alpha > n)$$

kun $k \neq \alpha$.

$b)$ Näytä induktiolla, että

$$\sum_{k\neq\alpha} A_j^{(n)}(k)p_{ki} = A_j^{(n+1)}(i)$$

kun $i \neq \alpha$ ja $n \geq 1$.

$c)$ Näytä, että

$$\widetilde{\pi}_j = \widetilde{\pi}_\alpha \sum_{m=1}^{n} A_\alpha^{(m)}(j) + \sum_{l\neq\alpha} \widetilde{\pi}_l A_l^{(n)}(j),$$

kun $j \neq \alpha$ ja $n \geq 1$ [Vihje: induktio, TP-jakauman määritelmä ja kohta b)]

$d)$ Jos $p_{\alpha j}^{(m)} > 0$, niin näytä että

$$\mathbf{P}_j\left(\,\tau_\alpha > n\,\right) \leq \frac{\mathbf{P}_\alpha\left(\,\tau_\alpha > n+m\,\right)}{p_{\alpha j}^{(m)}} \to 0,$$

kun $n \to \infty$.