

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Stokastiset prosessit

Harjoitus 3

03.06.2008

1. Olkoon (X_n) MK, jonka tilajoukko on $S \subseteq \mathbb{N}$ ja $n, m \geq 1$. Olkoon $M \subset S^n$ ja $T \subset S^m$ osajoukkoja ja $A := \{(X_0, \dots, X_{n-1}) \in M\}$, $B := \{(X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in T\}$ ja $C := \{(X_1, \dots, X_m) \in T\}$ tapahtumia. Näytä, että

$$\mathbf{P}(B | X_n = i \text{ ja } A) = \mathbf{P}(C | X_0 = i).$$

2. Tarkastellaan Markovin ketjua, jonka tilajoukkona on $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisi on

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ \frac{1}{4} & & & & & \frac{3}{4} \\ & \frac{2}{3} & & & & \frac{1}{3} \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \end{pmatrix}$$

a) Hae ei-triviaalit absorptiojoukot.

b) Merkitään $i \leftrightarrow j$ jos $i = j$ tai tilasta i on polku tilaan j ja tilasta j on polku tilaan i . Näytä, että \leftrightarrow on ekvivalenssirelaatio tilajoukolla S ja määrää sen ekvivalenssiluokat.

3. Jatkoa viime harjoitusten tehtävään 5. Tarkastellaan symmetristä satunnaiskulkua luonnollisilla luvuilla (eli $p_{00} = 1$, $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$, kun $i \geq 1$ ja $p_{ij} = 0$ muulloin).

a) Määrää absorptiohetken T_0 generoiva funktio $G_i(t)$ jokaisesta alkutilasta $i \in \mathbb{N}$.

b) Ratkaise absorptiohetken T_0 jakauma, kun lähdetään tilasta $X_0 = 1$.

4. Tarkastellaan haarautumisketjua, jossa todennäköisyys, että yksilö jää ilman jälkeläistä on p , todennäköisyys ja todennäköisyys, että yksilö saa kolme jälkeläistä $1 - p$. Määrää sukupuuttotodennäköisyys (oletamme luonnollisesti, että $X_0 = 1$).

5. Olkoon $S = \{0, 1, \dots, d\}$ ja $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ matriisi, jonka jokainen rivisumma on 1. Oletetaan, että $(Y(i, n); i = 0, 1, \dots, d, n \in \mathbb{N})$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia ja oletetaan, että

$$\mathbf{P}(Y(i, n) = j) = p_{ij}.$$

Olkoon $X_0 \in S$ satunnaismuuttuja, joka on riippumaton satunnaismuuttujista $(Y(i, n))$. Määritellään

$$X_{n+1} := Y(X_n, n), \quad n \geq 0.$$

a) Näytä, että tapahtumat

$$A := \{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} \quad \text{ja}$$

$$B := \{X_0 = i_0, Y(i_0, 0) = i_1, \dots, Y(i_{n-1}, n-1) = i_n\}$$

ovat samat.

b) Näytä, että ketju (X_n) on MK [Vihje. Käytä a)-kohtaa].