

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Stokastiset prosessit

Harjoitus 1

27.05.2008

Määritä seuraavissa kahdessa tehtävässä Markovin ketjujen siirtymätodennäköisyydet p_{ij} .

1. Kahdessa kulhossa on yhteensä N palloa. Hetkellä n ensimmäisessä kulhossa on X_n palloa ja toisessa $N - X_n$ palloa. Joka vaiheessa yksi N :stä pallosta valitaan satunnaisesti ja siirretään toiseen kulhoon.

2. Kahdessa kulhossa on yhteensä N mustaa ja N valkoista palloa. Kummassakin kulhossa on N palloa. Joka vaiheessa molemmista kulhoista valitaan yksi pallo satunnaisesti ja näin valitut pallot vaihdetaan keskenään. Ketju kuvaa valkoisten pallojen lukumäärää ensimmäisessä kulhossa.

3. Olkoon Y_0, Y_1, \dots riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia siten että $Y_0 \in \{H, T\}$ ja $\mathbf{P}(Y_0 = H) = \frac{1}{2}$. Näytä, että satunnaismuuttujat $X_n := (Y_n, Y_{n+1})$ muodostavat Markovin ketjun ja laske sen siirtymätodennäköisyydet p_{ij} .

4. Olkoon Y_1, Y_2, \dots riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden tilajoukkona on $S = \{1, 2, \dots, N\}$ ja $\mathbf{P}(Y_1 = i) = 1/N$ kullakin $i \in S$. Näytä, että satunnaismuuttujat $X_n := \#\{Y_1, \dots, Y_n\}$ muodostavat Markovin ketjun ja laske sen siirtymätodennäköisyydet p_{ij} . [Huomautus. Tässä tehtävässä sekä jatkossa $\#A$ tarkoittaa joukon A alkioden lukumäärää.]

5. Oletetaan, että päivän $n + 1$ säätila riippuu ainoastaan päivän n säätilasta. Merkitään

$$p = \mathbf{P}(\text{huomenna on pouta} \mid \text{tänään on pouta})$$

$$q = \mathbf{P}(\text{huomenna sataa} \mid \text{tänään sataa})$$

Määrää käyttäen hyväksi MK-mallia todennäköisyys

$$\mathbf{P}(\text{huomenna ja ylihuomenna sataa} \mid \text{tänään sataa})$$

sekä määrää sadejakson pituuden jakauma ja odotusarvo.