

Todennäköisyysteoria  
Harjoitus 25.9.2008

1. Oletetaan, että  $X, X_n, Y, Y_n \in L^2$  ja että

$$X_n \rightarrow X (L^2) \text{ ja } Y_n \rightarrow Y (L^2).$$

Osoita, että

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) \rightarrow \text{Cov}(X, Y).$$

2. Olkoot  $X, Y \in L^2$  mielivaltaisia. Hae satunnaismuuttujan  $X$  paras lineaarinen ennuste ehdolla  $Y$ , so. muotoa  $aY + b$  ( $a, b \in R$ ) oleva paras ennuste.

3. Oletetaan, että sm-pari  $X, Y$  on tasanjakautunut ympyräsektorissa. jota rajoittavat yksikköympyränkaari sekä  $x$ - ja  $y$ - akselit ( $x, y \geq 0$ ). Määää satunnaismuuttujan  $X$  paras ennuste ehdolla  $Y$ .

4. Oletetaan, että  $X$  on jakautunut eksponentiaalisesti parametrina  $\lambda > 0$ . Olkoon

$$B_n \doteq \{n \leq X < n + 1\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ja  $\mathcal{B}$  osituksen  $(B_n)$  virittämä  $\sigma$ -algebra. Muodosta  $E(X|\mathcal{B})$

5. Oletetaan, että  $EX^2 < \infty$ . Määritellään

$$\sigma^2(X) \doteq E(X - EX)^2,$$

ja

$$\sigma^2(X|\mathcal{B}) \doteq E((X - E(X|\mathcal{B}))^2|\mathcal{B}).$$

Osoita, että

$$\sigma^2(X) = E(\sigma^2(X|\mathcal{B})) + \sigma^2(E(X|\mathcal{B})).$$