**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Fourier-analyysi**
**Harjoitus 9**
**17.4.2009**

1.Olkoot $1 < p < \infty$ sekä $T$ ja $T^*$ rajoitettuja lineaarikuvauksia $L^p \to L^P$ siten, että

$$\int T(f)g = \int fT^*(g) \text{ kaikille } f, g \in \mathcal{S}.$$

Osoita, että $T$ on rajoitettu $L^2 \to L^2$. Mieti millaisiin singulaari-integraalioperaattoreihin tätä voi soveltaa.

2. Määritellään dyadinen Hardy-Littlewoodin maksimaalioperaattori asettamalla

$$M_d f(x) = \sup\{\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f| : x \in Q, Q \subset \mathbb{R}^n \text{ dyadinen kuutio}\}.$$

Osoita, että on olemassa vain $n$:stä riippuva vakio $C$ siten, että ($\tilde{M}$ on kuten harjoituksen 8 tehtävässä 5)

$$M_d f(x) \leq CMf(x) \leq C\tilde{M}f(x) \leq C^2 Mf(x).$$

Osoita myös, ettei epäyhtälö $Mf(x) \leq CM_d f(x)$ päde yleisesti millään vakiolla $C$.

3. Sanotaan, että $f \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^n)$ kuuluu dyadiseen BMOhon $BMO_d$, jos on olemassa $C < \infty$ siten, että

$$\int_Q |f - f_Q| \leq Cm(Q) \text{ kaikille dyadisille kuutioille } Q \subset \mathbb{R}^n.$$

Onko $BMO(\mathbb{R}) = BMO_d(\mathbb{R})$?

Seuraavat kaksi tehtävää johtavat siihen, että $H^1$:n duaali on $BMO$. Niissä $H^1_0$ on rajoitettujen ja kompaktikantajaisten funktioiden $g \in H^1$ joukko ja $L^2_Q$ niiden $g \in L^2$ joukko, joille spt$g \subset Q$ ja $\int g = 0$. Koska $H^1_0$ on tiheä $H^1$:ssä, $H^1$:n duaali määräytyy, kun karakterisoidaan jatkuvat lineaarikuvaukset $H^1_0 \to \mathbb{C}$.

4. Todista, että kaikilla $f \in BMO$ ja $g \in H^1_0$ on

$$|\int fg| \leq ||f||_* ||g||_{H^1_{at}},$$

toisin sanoen $l_f, l_f(g) = \int fg$, on jatkuva lineaarikuvaus $H^1_0 \to \mathbb{C}$.
Ohje: todista ensin kun $f$ on rajoitettu ja tarkastele sitten funktioita $f_k(x) = f(x)$, kun $|f(x)| \leq k$, $f_k(x) = k$, kun $f(x) > k$ ja $f_k(x) = -k$, kun $f(x) < -k$.

5. Olkoon $l : H^1 \to \mathbb{C}$ on jatkuva lineaarikuvaus. Todista, että on olemassa $f \in BMO$ siten, $l(g) = \int fg$ kaikille $g \in H^1_0$.
Ohje: Osoita, että jos $Q_0 \subset Q$ ovat suljettuja origokeskisiä kuutioita, $l$ voidaan laajentaa $H^1 \cap L^2_Q$:sta $L^2_Q$:hun jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi ja Rieszin esityslauseen avulla on olemassa $f^Q \in L^2_Q$ siten, että

$$l(g) = \int f^Q g \text{ kaikille } g \in L^2_Q.$$

Osoita, että jos $Q_0 \subset Q \subset Q'$, niin $f^Q - f^{Q'}$ kuutiossa $Q$ on vakio, jonka täytyy olla 0, joten $f$ voidaan määritellä asettamalla $f(x) = f^Q(x)$, kun $x \in Q$.

6. Todista Heisenbergin epätarkkuusperiaate: kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$16\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq ||f||_2^4.$$

Ohje: kirjoita vasemman puolen toinen integraali $f'$:n avulla.

Nimitys tulee siitä, että tämä voidaan tulkita kvanttimekaniikan epätarkkuusperiaatteena: hiukkasen paikkaa ja sen momenttia ei voida yhtä aikaa määrittää tarkasti.

KURSSIN LOPPUOHJELMA

7.4. Henri Martikainen, Pseudodifferentiaalioperaattoreista
16.4. Antti Perälä, Wienerin lauseet Banach algebra tekniikoita käyttämällä.
21.4. Teri Soultanis, Paley-Wienerin lauseita
23.4. Tuomas Sahlsten, Fourier-muunnos ja Hausdorffin dimensio
Viimeinen laskuharjoitus 17.4.
Luennot 24.4., 28.4., 30.4., 5.5., 7.5., 8.5., 12.5 ja 15.5.