Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 8
3.4.2009

1. Osoita, että jos $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ on C^∞-funktio siten että $|K(x)| \leq C|x|^{-n}$ ja $|\nabla K(x)| \leq C|x|^{-n-1}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, niin K (eli $(x, y) \mapsto K(x-y)$) on standardi C-Z-ydin.

2. Todista, että Calderón-Zygmund-kommutaattorit K_k,

$$K_k(x,y) = \frac{(A(x) - A(y))^k}{(x-y)^{k+1}}, x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, k = 1, 2, \ldots,$$

ovat standardeja C-Z-ytimiä aina, kun $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-funktio.

3. Olkoon $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-funktio. Osoita, että A:n kuvaajaan $\Gamma = \{(x, A(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ liittyvä Cauchy'n ydin C_Γ,

$$C_\Gamma(x,y) = \frac{1}{x - t + i(A(x) - A(t))}, x, t \in \mathbb{R}, x \neq t,$$

on standardi C-Z-ydin.

4. Todista, että jos T_1 ja T_2 ovat C-Z-operaattoreita, jotka liittyvät samaan standardiin C-Z-ytimeen K, niin on olemassa $a \in L^\infty$ siten, että $T_1 f - T_2 f = af$ kaikille $f \in L^2$.

5. Todista, että epäkeskiselle Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktiolle $\tilde{M}$,

$$\tilde{M}f(x) = \sup\{\int_B |f|/m(B), x \in B, B \text{ kuula}\},$$

pätee

$$m(E) \leq C_n \int_E |f|/\lambda \text{ kun } E = \{x : \tilde{M}f(x) > \lambda\},$$

kaikille $\lambda > 0$ ja kaikille integroituville funktioille $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

6. Olkoon $f(x) = \log|x|$, kun $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, Todista, että $f \in BMO$, ts. on olemassa $C < \infty$ ja kaikille rajoitetuille väleille $I \subset \mathbb{R}$ on olemassa c_I siten, että

$$\int_I |f(x) - c_I| dx \leq C m(I).$$