Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 7
20.3.2009

1. Olkoon $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ nollahomogeninen C^∞-funktio siten että $\int_{S^{n-1}} m = 0, 1 \leq j \leq n$ ja $\Omega(x) = \partial_j^n m(x)$, kun $x \in S^{n-1}$. Osoita, että distribuution $T - \partial_j^n m$ kantaja on origossa, missä

$$T(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Omega(x/|x|)|x|^{-n} f(x) dx, f \in \mathcal{S},$$

vrt. luentojen Lemman 4.9 (Duoandikoetxea Lemma 4.14) todistus.

2. Todista luentojen Lause 4.10 (Duoandikoetxea Theorem 4.13).

3. Todista, kaikille $f \in \mathcal{S}$ ja $i, j = 1, \ldots, n$, epäyhtälö

$$||\partial_i \partial_j f||_p \leq C_p ||\Delta f||_p.$$

Ohje: Rieszin muunnoksista voi olla apua.

4. Todista, että jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $u(x, y) = \int \log((x - t)^2 + y^2) f(t) dt$, kun $x, y \in \mathbb{R}$ ja $y \neq 0$, niin $\lim_{y \to 0} \partial_1 u(x, y) = 2\pi H f(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

5. Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $g(z) = \int \frac{f(t)}{t-z} dt, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sen Cauchy-muunnos. Mitä on $\lim_{y \to 0} g(x + iy)$, kun $x \in \mathbb{R}$?

6. Todista, että jos funktiolla $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja sen Fourier-muunnoksella on kompaktit kantajat, niin $f = 0$.
Ohje: Voit käyttää kompleksianalyysiä ja tietoa, että jos $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen, niin g on vakio tai sen nollakohtien joukko on numeroituva.

HUOM. 23-26.3. on workshop Random structures, growth processes and conformal methods, http://www.helsinki.fi/ nbrannst/CODY/index.html, johon kuuluvat suositeltavat minikurssit:
Y. Peres (Berkeley): Internal aggregation with multiple sources (4.5 hours)
M. Zinsmeister (Université d'Orléans): Introduction to Growth Processes (6 hours)
Tällöin ei ole Fourier-analyysin luentoja. Perjantaina 27.3. on laskuharjoitusten tilalla luento.