Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 6
27.2.2009

1. Todista, että kaikilla $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R})$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p, q < \infty$,

$$\int fHg = -\int gHf.$$

Reaaliluvun $x \in \mathbb{R}$ murto-osa on $\tilde{x} \in [0,1)$, jolle $\tilde{x} + m = x$ jollekin $m \in \mathbb{Z}$. Jono $(y_j) \in [0,1)$ on tasaisesti jakautunut, jos kaikille $0 \leq a < b < 1$ on

$$\lim_{N\to\infty} \frac{card\{j : 1 \leq j \leq N, y_j \in (a,b)\}}{N} = b - a.$$

2. Todista, että jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja 1-jaksollinen ja x on irrationaalinen, niin

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(jx) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Ohje: Todista tämä ensin, kun $f(t) = e^{2\pi ikt}$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Käytä tietoa, että jatkuvia funktioita voi approksimoida trigonometrisillä polynomeilla.

3. Todista, että jos x on irrationaalinen, niin jono $\widetilde{jx}, j = 1, 2, \ldots,$ on tasaisesti jakautunut.
Ohje: Approksimoi välin (a,b) karakteristista funktiota jatkuvilla funktioilla ja käytä edellistä tehtävää.

Parametrisoidaan $\mathbb{R}^3$:n tasot asettamalla

$$T(v,t) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot v = t\}, v \in S^2, t \in \mathbb{R}.$$

Määritellään funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ Radonin muunnos asettamalla (integraali on 2-ulotteinen Lebesguen integraali tason yli)

$$R(f)(v,t) = \int_{T(v,t)} f, \text{ kun } v \in S^2, t \in \mathbb{R}.$$

4. Todista, että jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, niin $t \mapsto R(v,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jokaiselle $v \in S^2$.

5. Todista, että jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, niin

$$\hat{R}(f)(v,t) = \hat{f}(tv) \text{ kaikille } v \in S^2, t \in \mathbb{R}.$$

Tässä Fourier-muunnos $\hat{R}(f)(v,t)$ tarkoittaa funktion $t \mapsto \widehat{R(f)}(v,t)$ Fourier-muunnosta kiinteällä v:llä. Totea tästä, että jos $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ja $R(f) = R(g)$, niin $f = g$.

6. Todista, että jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, niin

$$\Delta(R^\star R(f)) = -8\pi^2 f,$$

missä $R^\star$ on duaali Radonin muunnos:

$$R^\star(F)(x) = \int_{S^2} F(v, x \cdot v) d\sigma v,$$

σ on pintamitta S^2:lla.

Tämä kaava siis kertoo, miten f saadaan takaisin Radonin muunnoksestaan. Vastaavia tuloksia pätee myös klassiselle Radonin muunnokselle tasossa, jossa integroidaan kaikkien tason suorien yli, mutta todistukset ovat hankalampia.

HUOM. Viikoilla 2-13.3. ei ole luentoja eikä laskuharjoituksia.