Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 5
20.2.2009

1. Todista Whitney'n peitelause: jos $F \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu ja $\emptyset \neq F \neq \mathbb{R}^n$, niin on olemassa erilliset kuutiot $Q_i, i = 1, 2, \ldots$, siten, että $R^n \setminus F = \cup_i Q_i$ ja $c(n)d(Q_i) \leq d(F, Q_i) \leq C(n)d(Q_i)$, missä $c(n)$ ja $C(n)$ ovat positiivisia vakioita.

2. Olkoon G tasoalue, jota rajoittaa säännöllinen (C^1), yksinkertainen (ei leikkaa itseään) käyrä Γ, jonka pituus on L. Todista isoperimetrinen epäyhtälö

$$m_2(G) \leq L^2/(4\pi)$$

Fourier-sarjojen avulla.
Ohje: Voimme olettaa, että $L = 2\pi$. Olkoon $\gamma = (\alpha, \beta) : [0, 2\pi] \to \Gamma$ Γ:n parametriesitys kaarenpituuden avulla, jolloin Vektorianalyysin mukaan

$$L = 2\pi = \int_0^{2\pi} (\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2) dt$$

ja

$$m_2(G) = \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} (\alpha(t)\beta'(t) - \beta(t)\alpha'(t)) dt \right|.$$

Esitä α ja β Fourier-sarjojen summana ja käytä Parsevalin yhtälöä.

3. Näytä, että edellisessä isoperimetrisessä epäyhtälössä yhtälö pätee, jos ja vain jos Γ on ympyrä.
Ohje: Tutki, mitä tapahtuu edellisessä päättelyssä, jos yhtälö pätee.

4. Todista, että jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ on Hölder-jatkuva jollain eksponentilla $0 < \alpha \leq 1$, niin äärellinen raja-arvo

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{y : |y-x| > \epsilon\}} \frac{f(y)}{y - x} dy$$

on olemassa kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Tehtävät 5 ja 6 ovat kääntöpuolella.

5. Osoita, että välin $[0,1]$ karakteristisen funktion Hilbertin muunnos ei ole integroituva.

6. Laske maksimaalifunktion

$$H^*f(x) = \sup_{\epsilon>0} |\frac{1}{\pi} \int_{\{y:|y-x|>\epsilon\}} \frac{f(y)}{y-x} dy|$$

arvo kaikille $x \in \mathbb{R}$, kun f on välin $[0,1]$ karakteristisen funktio.