Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 4
13.2.2009

1. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on radiaalinen, jos se on muotoa $f(x) = g(|x|)$. Todista, että f on radiaalinen, jos ja vain jos $f \circ \rho = f$ kaikille $\rho \in O(n)$ ($\rho \in O(n)$ jos ja vain jos $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarinen ja $\rho(x) \cdot \rho(y) = x \cdot y$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$).

2. Todista, että radiaalisen funktion $f \in L^1$ Fourier-muunnos on radiaalinen.

3. Todista, että radiaalisen funktion $f \in L^2$ Fourier-muunnos on radiaalinen.

4. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ radiaalinen, $f(x) = g(|x|)$. Osoita, että

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi|\xi|r)g(r)rdr,$$

missä J_0 on Besselin funktio

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t \sin\theta)d\theta.$$

Seuraavissa tehtävissä σ_1 on tason yksikköympyrän kehän S^1 pituusmitta ja σ_2 avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon(kuoren) S^2 pintamitta. Voit käyttää niille integrointikaavoja napa- ja pallokoordinaateissa:

$$\int g d\sigma_1 = \int_0^{2\pi} g(\cos\theta, \sin\theta)d\theta,$$

$$\int g d\sigma_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi) \sin\phi d\phi d\theta.$$

5. Mikä on σ_1:n Fourier-muunnos (Besselin funktion avulla)?

6. Mikä on σ_2:n Fourier-muunnos?

7. Todista, että f jos T on vahvaa tyyppiä (p, q), niin se on heikkoa tyyppiä (p, q).