Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 3
6.2.2009

1. Todista, että $\mathcal{S} \subset L^p$ kaikilla $1 \leq p \leq \infty$.

2. Näytä, että $T_f, T_f(\phi) = \int f\phi, \phi \in \mathcal{S}$, on tempereroitu distribuutio, jos $f \in L^p$ jollekin $1 \leq p \leq \infty$.

3. Todista (tarkemmin kuin luennolla), että $\hat{f} \in \mathcal{S}$, jos $f \in \mathcal{S}$.

4. Todista, että f on jatkuva, jos $f, \hat{f} \in L^1$. Voit käyttää tietoa, että käänteiskaava pätee f:lle, jos $f, \hat{f} \in L^1$ ja f on jatkuva.

5. Osoita, että on olemassa $f \in C_0^\infty$, joka ei ole identtisesti 0, siten, että $\hat{f} \geq 0$.

6. Mikä on mitan μ, joka määritellään Borelin joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ kaavalla

$$\mu(A) = m_1(\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1, (x, 0) \in A\}),$$

Fourier-muunnos?

7. Mikä on funktion (eli temperoidun distribuution) $f, f(x) = x, x \in \mathbb{R}$, Fourier-muunnos?

8. Näytä, että $(fg)\hat{} = \hat{f} \star \hat{g}$, jos $f, g \in \mathcal{S}$.