Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 2
30.1.2009

Seuraavassa $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Todista, että

1. $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (Riemann-Lebesgue'n lemma),

2. $(f \star g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$,

3. $(\tau_a f)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i a\cdot\xi}$ kaikille $a, \xi \in \mathbb{R}^n$, missä $\tau_a f(x) = f(x+a)$,

4. $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$, missä $\lambda > 0$ ja $g(x) = \lambda^{-n} f(x/\lambda)$,

5. $(\partial_j f)\hat{}(\xi) = 2\pi i\xi_j \hat{f}(\xi)$, jos osittaisderivaatta $\partial_j f(x)$ on olemassa (ja äärellinen) kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\partial_j f \in L^1$,

6. $(-2\pi i x_j f(x))\hat{}(\xi) = \partial_j \hat{f}(\xi)$, jos $x_j f(x) \in L^1$,

7. $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$ ja $\hat{f}$ on jatkuva.

8. Laske välin $[0,1]$ $\mathbb{R}$:ssä ja neliön $[0,1]\times[0,1]$ $\mathbb{R}^2$:ssa karakterististen funktioiden Fourier-muunnokset. Miten nopeasti ne menevät kohti nollaa äärettömyydessä?