Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier-analyysi
Harjoitus 1
23.1.2009

1. Todista Dirichlet'n ytimelle kaava

$$D_N(t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

2. Täydennä Dinin ehdon eli lauseen 1.1 todistus.

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on m kertaa jatkuvasti derivoituva 1-jaksollinen funktio. Laske m:nen derivaatan $f^{(m)}$ Fourier-kertoimet f:n Fourier-kertoimien avulla ja osoita, että

$$\lim_{|k|\to\infty} k^m \hat{f}(k) = 0.$$

4. Laske $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ (esimerkiksi Parsevalin kaavan avulla tarkastelemalla funktiota $f(x) = x$).

5. Todista, että jos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < \infty$, niin f on jatkuva, ja jos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\hat{f}(k)| < \infty$, niin f on jatkuvasti derivoituva.

6. Todista, että jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on 1- jaksollinen ja Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, x, y \in \mathbb{R},$$

niin jollain $K < \infty$

$$|\hat{f}(k)| \leq K|k|^{-\alpha} \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

7. Näytä, että edellistä tulosta ei voi paljon parantaa funktion f,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(3^k 2\pi x)}{3^{k\alpha}},$$

avulla.