Integraaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 2
Palautus viimeistään maanantaina 22.1.2009

1. Olkoon M Hilbert–avaruuden H suljettu aliavaruus, ja $P : H \to M$ ortogonaaliprojektio. Määrää P:n adjungaatti P^*.

2. Olkoon H Hilbertin avaruus, ja M sen aliavaruus. Osoita, että M:n sulkeumalle $\overline{M}$ pätee
$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$

3. Olkoon M Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus, ja $\lambda : M \to \mathbb{C}$ rajoitettu lineaarinen M:n funktionaali. Osoita, että on olemassa H:n lineaarinen funktionaali μ siten että μ:n rajottuma aliavaruuteen M on λ ja $\|\mu\| = \|\lambda\|$.

4. Olkoot H_1 ja H_2 Hilbert–avaruuksia. Osoita että kääntyvien rajoitettujen lineaarikuvausten joukko $H_1 \to H_2$ on $L(H_1, H_2)$:n avoin osajoukko, kun tämä varustetaan operattorinormin määräämällä topologialla.

5. Olkoon $A : H \to H$ Hilbert–avaruuden H rajoitettu lineaarikuvaus itselleen. Oletetaan, että jollain positiivisella kokonaisluvulla k pätee $\|A\|^k < 1$. Osoita, että operaattori $I - A$ on kääntyvä, ja sen käänteisoperaattori saadaan edelleen Neumann–sarjasta.

6. Määritellään lineaarikuvaus $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ kaavalla
$$T_t\phi(x) = \phi(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, \phi \in L^2(\mathbb{R}).$$
Määrää $\|T_t\|$ ja T_t^*.

7. Tarkastellaan integraaliyhtälöa
$$f(x) + \frac{1}{100}\int_0^1 e^{-|xy|}\, f(y)\, dy = \sin x.$$
Osoita että tällä on yksikäsitteinen ratkaisu avaruudessa $L^2([0,1])$.

8. Olkoon $A : H \to H$ rajoitettu lineaarikuvaus, ja H Hilbertin avaruus. Määrittelemme, että A on *koersiivinen*, jos on olemassa positiivinen vakio C siten että

$$\mathrm{Re}\,(Au, u) \geq C\|u\|^2, \quad u \in H.$$

Osoita, että jokainen koersiivinen operaattori on kääntyvä, ja että sen kuva–avaruus on suljettu.

9. Olkoon $A : H \to H$ Hilbert–avaruuden rajoitettu lineaarikuvaus, jonka kuva–avaruus on suljettu. Kuinka adjungaatin A^* nolla–avaruus ja A:n kuva–avaruus liittyvät toisiinsa?

10. Osoita, että koersiivinen operaattori on aina kääntyvä. Vihje: tutki adjungattia A^*.