Integraaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 1

Palautus viimeistään maanantaina 15.12

.

1. Ratkaise Volterra–yhtälö

$$f(x) = x - \int_0^x (t - x) f(t)\, dt$$

muuntamalla se tavallisen differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelmaksi.

2. Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$y''(x) - y(x) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Muunna tämä sopivaksi Volterra–yhtälöksi integroimalla kahdesti.

3. Tarkastellaan nyt alkuarvo–ongelmaa

$$y''(x) - y(x) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Muunna tämä Volterra–yhtälöksi.

4. Todista, että Hilbertin avaruudessa pätee ns. *polarisaatioyhtälö*:

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

5. Miltä näyttää ylläolevan polarisaatioyhtälön vastine reaalikertoimisille Hilbert–avaruuksille ?

6. Osoita, että avaruudessa $C([a, b])$ ei ole olemassa sisätuloa, jonka määräämä normi olisi

$$\|u\| = \max_x |u(x)|.$$

7. Olkoon $\lambda : H \to \mathbb{C}$ Hilbertin avaruuden H rajoitettu lineaarinen funktionaali, eli jatkuva lineaarikuvaus $H \to \mathbb{C}$, joka ei häviä identtisesti. Osoita, että $(\ker \lambda)^{\perp}$ on yksiulotteinen aliavaruus.

8. Osoita, että operaattorinormi

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|,$$

toteuttaa kaikki normin aksioomat, ja että vektoriavaruus

$$L(H) = \{A : H \to H;\ A \text{ on rajoitettu ja lineaarinen}\}$$

on tämän normin suhteen täydellinen.

9. Osoita, että operattorinormille pätee

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

10. Oletetaan, että A ja B ovat jatkuvia lineaarikuvauksia Hilbertin avaruudelta H itselleen, jotka kommutoivat, eli $AB = BA$. Osoita, että jos AB on kääntyvä, niin myös A ja B ovat.