Integraaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 4

Palautus ... Hmmm, ennen ensi lokakuuta.

Pisteytys: Seuraavissa tehtävä kaksi on 12 pisteen arvoinen, ja muut kuuden pisteen arvoisia. Vaikka et saisi kakkosta ratkaistua, kannattaa muita tehtäviä silti yrittää, tarvitset niihin vain kakkosen tulosta ja Greenin kaavoja.

1. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu C^2–alue, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ja että se toteuttaa Ω:ssa yhtälön
$$(\Delta + k^2)u = 0. \tag{0.1}$$
Oletetaan, että $\operatorname{Im} k > 0$ ja että joko $u|_{\partial\Omega} = 0$ tai $\partial_\nu u = 0$. Osoita, että $u = 0$.

2. Olkoon Ω kuten edellä, ja $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ Helmholzin yhtälön (0.1) ratkaisu $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$):ssa. Oletetaan, että se toteuttaa lunnoilla esitetyn Sommerfeldin radiaatioehdon. Olkoon $R_0 > 0$ niin suuri että $|x| > R_0$ implikoi, että $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Olkoot $(r, \theta, \phi\ )$napakoordinaatit $\mathbb{R}^3$:ssa. Osoita, että olemassa kulmamuuttujien θ ja ϕ jatkuvat funktiot F_n siten, että
$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \phi)}{r^n}$$
kun $r \geq R_0$, ja että tämä sarja suppenee tällöin itseisesti, ja että sitä saa derivoida termeittäin.

   Vihje: käytä ulkoalueen esityskaavaa sopivan pallon komplementissa, siirry napakooridnaatteihin ja kehitä integraali sarjaksi.

3. Osoita, että edellisen tehtävän funktiot F_n toteuttavat rekursiivisen yhtälön
$$2iknF_n = n(n-1)F_{n-1} + B(F_{n-1}),$$
missä B on differentiaalioperaattori (n.k Beltrami operaattori pallon pinnalla)
$$B = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$
Vihje: Kirjoita Δ napakoordinaateissa, ja sovella operaattoria $\Delta + k^2$ puolittain edellisen tehtävän kehitelmään.

4. Olkoon u edelleen kuten tehtävässä kolme. Funktiota F_0 kutsutaan u:n *kaukokentäksi*. Osoita, että jos $F_0 = 0$, niin $u = 0$.

5. Oletetaan, että $k > 0$, ja u kuten yllä. Osoita, että jos

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|=R} |u|^2 dS = 0,$$

niin $u = 0$.

6. Olkoon k ja u kuten edellisessä tehtävässä. Oletetaan vielä että $u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ ja että

$$\mathrm{Im}\left(k \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}\, dS\right) \geq 0.$$

Osoita, että $u = 0$.

7. Osoita, että u on kuten edellä. Oletetaan, että joko $u|_{\partial\Omega} = 0$ tai $\partial_\nu u = 0$. Osoita, että $u = 0$.