Integraaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 3

Palautus viimeistään 1.5..2009 (Kukahan tätä nyt enään tosissaan ottaa ... ?)

1. Olkoon T Hilbert–avaruuden H rajoitettu lineaarikuvaus itselleen. Oletetaan, että T^*T on kompakti. Osoita, että myös T on kompakti.

2. Olkoot H Hilbert–avaruus, ja $S, T : H \to H$ Fredholm–operaattoreita. Onko summa $S + T$ aina Fredholm?

3. Olkoon H Hilbert–avaruus, ja (e_j) sen numeroituva ortonormaali kanta. Määritellään lineaarikuvaus

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}(u, e_j)e_j,\ u \in H.$$

   Osoita, että A on hyvin määritelty, jatkuva, ja että sen kuva–avaruus ei ole suljettu.

4. Osoita, että edellisen tehtävän operattori A on kompakti.

5. Oletetaan, että $A : H \to H$ on kääntyvä ja kompakti lineaarikuvaus. Osoita, että H on äärellisulotteinen.

6. Olkoon $I = [0, 1]$ ja $G \in L^2(I \times I)$. Osoita, että kaava

$$Ku(x) = \int_I G(x, y)u(y)\, dy$$

   määrää jatkuvan lineaarikuvauksen $L^2(I \times I) \to L^2(I \times I)$.

7. Osoita, että edellisen tehtävän lineaarikuvaus on kompakti.

8. Tarkastellaan alkuarvo–ongelmaa

$$u'' + pu' + qu = f$$

   yksikkövälillä $I = [0, 1]$, alkuehtoina

$$u(0) = a,\ u(1) = b.$$

   Oletetaan, että p, q ja f ovat jatkuvia funktioita välillä I. Osoita, että tämä on ekvivalentti integraaliyhtälön

$$v - Kv = g$$

kanssa, missä

$$Kv(x) = \int_I G(x,y)v(y)\,dy,$$

$$G(x,y) = \begin{cases} y(q(x)(1-x) - p(x)), & y \le x \\ (1-y)(q(x)x + p(x)), & y \ge x, \end{cases}$$

ja

$$g = ph' + qh - f, \;\; h(x) = a(1-x) + bx.$$

Onko tämä yhtälö Fredholm?