FUNKTIONAALIANALYYSI II

1. Korjauksia ja lisäyksiä

Esimerkki 2.14
Osoita, että $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \delta_0$ avaruudessa $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, kun $f_n(x)$ on

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon_n}{x^2+\varepsilon_n^2}, \tag{1.1}$$

missä $\varepsilon_n > 0$ ja $\varepsilon_n \to 0$ (KORJATTU), kun $n \to \infty$;

$$\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{nx^2}{4}}; \tag{1.2}$$

$$\frac{\sin(nx)}{\pi x}; \tag{1.3}$$

$$\frac{\sin^2(nx/2)}{2\pi n (x/2)^2}. \tag{1.4}$$

Käytä tietoa, että

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Kohta (1.3) on vaativampi: luentojen lause 2.13 ei sellaisenaan riitä, vaan olisi muokattava ja todistettava siitä versio, jossa riittää heikommat oletukset.

Distribuutioavaruuden täydellisyys. Tarkastellaan distribuutioavaruutta $\mathcal{D}'(\Omega)$ varustettuna heikolla topologiallaan. Pätee

Lause. *Olkoon $(T_j)_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ jono distribuutioita, jolle raja-arvo*

$$\lim_{j\to\infty} \langle \varphi, T_j \rangle \in \mathbb{C} \tag{1.5}$$

on olemassa kaikilla testifunktioilla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tällöin lineaarikuvaus

$$T : \varphi \mapsto \lim_{j\to\infty} \langle \varphi, T_j \rangle \tag{1.6}$$

on jatkuva $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, eli se on Ω:n distribuutio. Jono $(T_j)_{j=1}^\infty$ suppenee T:hen avaruudessa $\mathcal{D}'(\Omega)$

Todistus löytyy Horvathin kirjasta, Propositio 2 luvussa 4.1. Lause voidaan tulkita niin, että $\mathcal{D}'(\Omega)$ on heikosti jonotäydellinen. Jos nimittäin $(T_j)_{j=1}^\infty$ on heikko Cauchyn jono, se tarkoittaa, että $(\langle \varphi, T_j \rangle)_{j=1}^\infty$ on Cauchyn jono $\mathbb{C}$:ssä kaikilla testifunktioilla. Tästä seuraa, että lauseen oletus on voimassa, koska $\mathbb{C}$ on täydellinen. Jonon heikko suppeneminen seuraa lauseesta.