Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 13, kevät 2009

1. Todista harmonisten funktioiden keskiarvoperiaate $\mathbb{R}^3$:ssa käyttääen Euler-Poisson-Darboux- yhtälöä. **Huom.** Tämän voi toki helpommin osoittaa suoraa, mutta tarkoitus on tässä osoittaa, että harmonisia funktioita voi myös käsitellä ajasta riippumattomina aaltoyhtälön ratkaisuina.

2. Ratkaise Cauchy–ongelma

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x_2,\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

3. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa *lennätinyhtälölle*,

$$w_{tt} = c^2 w_{xx} - c^2 \lambda^2 w,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$w(x,0) = 0,\ \ w_t(x,0) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

   Osoita, että

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} J_0(\lambda s) f(y)\, ds,$$

   missä $s^2 = c^2 t^2 - (x-y)^2$, ja

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z\, \sin\theta)\, d\theta$$

   on (kertaluvun nolla) Bessel–funktio. **Vihje:** Osoita, että funktio

$$u(x,y,t) = \cos(\lambda y) w(x,t)$$

   toteuttaa kaksiulotteisen aaltoyhtälön. Käytä Poissonin kaavaa ja määrää u, sekä sen jälkeen sovella laskeutumis-menetelmää palataksesi takaisin lennätinyhtälöön.

4. Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinta, jolla on parametriesitys

$$S:\ t = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

missä $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Olkoot $f,\, g \in C^\infty(S)$ ja $w \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Oletetaan, että pinta S on *ei–karakteristinen*, eli että

$$\psi(x) = 1 - c^2|\nabla\varphi(x)|^2 \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^3.$$

Osoita, että on olemassa C^∞–funktiot a_i, $i = 0, \ldots, 4$, siten että funktio

$$v(x,t) = \sum_{i=0}^{4} a_i(x)(t - \varphi(x))^i$$

toteuttaa

$$v|_S = f,\ v_t|_S = g,\ (\Box v - w)|_S = 0,$$

missä

$$\Box = \partial_{tt} - c^2\Delta$$

on *aalto–operaattori.*

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Tarkastellaan nyt Cauchy–ongelmaa alkuarvopintana S:

$$\Box u = w,\ t > \varphi(x), \tag{0.1}$$
$$u|_S = f,\ u_t|_S = g. \tag{0.2}$$

Olkoon v edellisessä tehtävässä konstruoitu funktio, ja määritellään $W(x,t) = w(x,t) - \Box v(x,t)$. Osoita, että funktio

$$W^*(x,t) = \begin{cases} W(x,t), & t \geq \varphi(x) \\ 0, & t < \varphi(x) \end{cases}$$

kuuluu avaruuteen $C^2(\mathbb{R}^n)$, ja että $U = u - v$ toteuttaa Cauchy–ongelman

$$\Box U = W^*,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{0.3}$$
$$U(x,0) = U_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{0.4}$$

Tämän ongelmanhan voi ratkaista Duhamelin periaatteella.

6. Olkoon U ongelman (0.3)-(0.4) ratkaisu. Oletetan, että alkuarvopinta S on *paikankaltainen*, eli

$$1 - c^2|\nabla\varphi(x)|^2 > 0.$$

Osoita, että $u = U + v$ toteuttaa Cauchy–ongelman (0.1)-(0.2). **Vihje:** Riittää osoittaa, että $U = 0$ kun $t < \phi(x)$. Osoita, että $W^*(y,s)$ häviää (x,t)–kärkisessä menneisyyteen osoittavassa valokartiossa, ja käytä Duhamelin periaatetta yhdessä paikankaltaisuusehdon kanssa.