Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 12, kevät 2009

1. Olkoon u radiaalinen funktio $\mathbb{R}^n$:ssä, $n \geq 2$. Laske Δu napakoordinaateissa.

2. Määrää Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 2,\ u_t(x,0) = 1 + |x|^2,$$

radiaalinen ratkaisu.

3. Määrää Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = ae^{-|x|^2},\ u_t(x,0) = be^{-|x|^2},$$

radiaalinen ratkaisu.

4. Oletetaan, että C^1–vektorifunktiot $E(x,t)$ ja $B(x,t)$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$) toteuttavat *Maxwell–yhtälöt*

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \nabla \times B(x,t),$$

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = -\nabla \times E(x,t),$$

$$\nabla_x \cdot E(x,t) = \nabla_x \cdot B(x,t) = 0.$$

Osoita, että E:n ja B:n jokainen komponenttifunktio toteuttaa aaltoyhtälön

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0.$$

Vihje: Käytä identiteettiä $(\nabla\times)^2 = \nabla\nabla \cdot -\Delta$.

5. Oletetaan, että u toteuttaa Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

missä f, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Osoita, että on olemassa vakio C siten että

$$|u(x,t)| \leq C/t,\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

6. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa yksiulotteiselle aaltoyhtälölle

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Oletaan, että $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ on tämän ratkaisu, ja f:llä ja g:llä on kompaktit kantajat. Määritellään *kineettinen energia* kaavalla

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)\,dx,$$

ja *potentiaalienergia* kaavalla

$$p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx.$$

Osoita, että (a) $k(t)+p(t)$ on vakio, ja että (b) riittävän suurilla t pätee $k(t) = p(t)$. **Vihje**: Osa tehtävästä löytyy luentojen alkupuolelta.