Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 11, kevät 2009

1. Ratkaise Dirichlet–ongelma

$$\Delta u(x,y) = 0,\ x^2 + y^2 < 1,$$

$$u(x,y) = y + y^2,\ x^2 + y^2 = 1.$$

2. Todista, että jokainen origokeskisessä a–säteisessä kiekossa harmoninen, ei–negatiivinen funktio u toteuttaa ns. Harnackin–epäyhtälön

$$\frac{a-r}{a+r}u(0,0) \le u(x.y) \le \frac{a+r}{a-r}u(0,0),\ 0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < a.$$

3. Etsi joukossa $\{(x,y);\ x^2+y^2 > 4\}$ harmoninen funktio u, jolle

$$u(x,y) = y,\ x^2 + y^2 = 4,$$

ja

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} u(x,y) = 0.$$

4. Määrää puolikiekon $\{(x,y); x^2+y^2 < 1,\ y > 0\}$ Dirichlet–Greenin funktio.

5. Olkoon D tason yksikkökiekko. Määrää sen komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ Dirichlet–Greenin funktio.

6. Olkoon D tason C^2–alue. Osoita, että alueen D Dirichlet–Greenin funktio (Laplace–operaattorille) on symmetrinen, eli

$$G(x,y;\xi,\eta) = G(\xi,\eta;x,y)$$

kaikilla (x,y), $(\xi,\eta) \in D$, kun $(x,y) \neq (\xi,\eta)$. **Vihje:** Tarkastele harmonisia funktioita

$$v(\sigma,\tau) = G(\sigma,\tau;x,y),\ w(\sigma,\tau) = G(\sigma,\tau;\xi,\eta)$$

alueessa $D \setminus \{(x,y),(\xi,\eta)\}$, ja sovella Greenin kaavoja kuten luennoilla esityskaavan todistuksessa.