

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt 2 (ODY2)

Matti Lassus

Johdanto

Esimerkki: ODY:stä on Laplace-yhtälö

$$\Delta u = 0 \quad \Omega:ssa, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin,}$$

eli

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

Tämä yhtälö mallittaa sähköjohtavuutta, diffusiota ja lämmenjohtavuutta.

Esim $u(x)$ = sähköinen potentiaali.

$$J(x) = -\sigma(x) \cdot \nabla u(x) = \text{virta}$$

↑
Johtavuus

$$\nabla \cdot J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u = 0$$

Esim 2 $\Delta u = 0$ on lineaarinen approksimaatio (HT) minimipintayhtälöllä.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u \right) = 0$$

Tarkastellaan lähdetermiä sisältävää Poisson-yhtälöä

$$\Delta u(x) = f(x) \quad x \in \Omega$$

klassisesti, $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$.

Kurssilla tarkastellaan vastavastaisien yhtälöiden yleistettyjä, eli heikkouja ratkaisuita.

Motivointi 1: Pistelähteet

Esim. $f(x)$ on pistelähtetä vastaava nitti,

$$f(A) = \begin{cases} 1 & \text{jos } 0 \in A \\ 0 & \text{jos } 0 \notin A \end{cases}, \quad A \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel-} \\ \text{joukko}$$

eli $f(x) = \delta_0(x)$.

Esim $f(x)$ vastaa "dipolia",

$$f(x) = \vec{A} \cdot \nabla \delta_0(x)$$

Motivointi 2: Olemassaolo

Esim: Tarkastellaan yhtälöä

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Ouko kahlille $f \in C(\bar{\Omega})$ olemassa ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$?

Vastaus: EI!

Olemassaolo on helpompaa tarkastella heikolle ratkaisulle kuin klassiselle, eli C^2 -ratkaisulle.

Motivativasti 3 : Tehniihet funktionaali-analyysistä

Olhoon:

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{ f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid f = D^\alpha u \in C(\bar{\Omega}) \text{ ovsst} \\ \text{laajennettavissa funktioiksi:} \\ \bar{f}_\alpha \in C(\bar{\Omega}), |\alpha| \leq m \}$$

$$D^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u(x),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Avaruus $C^m(\bar{\Omega})$ on Banach-avaruus, joka
on ei-refleksiivinen.
Tulemme tarkastelemaan Hilbert-avaruutta.

$$H^m(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega) \},$$

$\uparrow$ "korkko derivoitu"

$$L^2(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ mitall., } \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \}.$$

Esimerkiksi Δ on rajoitettu lineaarinen operaattori.

$$\Delta: H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

Tulemme kurssilla kohtaanasi (niel esihinnasto riippuu)

A: Sobolev - arvuudet $H^m(\Omega)$ ja heikot
ODY: den ratkaisut

B: ODY olemassaolotulosia heikkolla ratkaisulla

C: Sileyden parastunises: $\exists$ sin, jos
 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,
 $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \dots \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

D: Operaattoriteoria ODY:lla
ja sovelluksissa aalto- ja lämpöyhtälöille

$$\partial_t v(x, t) = \Delta_x v(x, t)$$

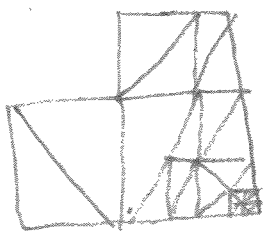
$\downarrow$

$$v(x, t) = e^{t \Delta_x} v(x, 0)$$

E: Numeristen menetelmien perusteita

$$u, f \in PL(T) \subset H^1(\Omega)$$

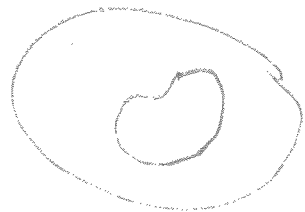
$$\Delta u \approx f$$



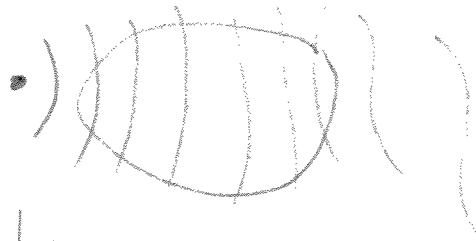
Kurssilla opiteltavat menetelmät sovelletaan seuraaviin asioihin

- ODY epälineella ja muuttuvilla kerroinfunktiolla.

$$\nabla \cdot (1 + \chi_{\Omega_1}(x)) \nabla v(x) = 0$$



- Inversio-ongelmat: pistelähteen läheisyydestä ja kertomien määrittäminen



- Rathamisuden numeerinen simulointi
- L^p -teoria ODY:llä
- Epälineaariset yhtälöt

$$\Delta u + f(u) = 0$$
- Systemit (Maxwell, Dirac)
- FEM, FD -menetelmät
- Mikrolokaali analyysi ODY:llä

I Funktioavaruuksia

1.1 Hölder-avaruudet

Funktio $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu
on Lipschitz, jos

$$|u(x) - u(y)| \leq L |x - y|, \quad x, y \in \Omega.$$

Funktio $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on Hölder-jatkuva eksponentilla γ , $0 < \gamma \leq 1$ jos

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\gamma.$$

Määr. 1.1 1) Jos $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu, merkitsemme

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

2) Funktio $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ on $C^k(\bar{\Omega})$:ssä, jos $D^\alpha(u|_{\bar{\Omega}})$ on kaikilla $|\alpha| \leq k$ lauseuttavissa funktioina $f^\alpha \in C(\bar{\Omega})$ ja

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})}$$

3) Funktio $u \in C^k(\bar{\Omega})$ on avaruudessa $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ jos

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}} < \infty,$$

$$[u]_{C^{0,\gamma}} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

Lause 1.2 Avaruudet $C^k(\bar{\Omega})$ ja $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ ovat Banach-avaruuksia.

Tod. Siivottuna.

Seuraavaksi käsittelemme " L^2 -derivaattoja".

Tästä tulee "kertaan" Hilbert-avaruus

$$L^2(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mitullinen,}$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty\}$$

approksimoitavinaisuuden.

Merkintä: $B(y, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < R\}$

$$\phi \in C_0^\infty(B(0,1)), \quad \phi(x) \geq 0$$

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$$

$$v \in L^2(\Omega), \quad v_0(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

Funktiota ϕ_ε kutsumme jatkossa silottajiksi (mollifiers)

Lemma 1.2 B Olkoon $v \in L^2(\Omega)$ ja

$$v_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) v(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) v_0(y) dy$$

Tällöin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon - v\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

tod.

Koska
missä

$v_0(x) = 0$ kun $x \notin \Omega$, saamme $v_\varepsilon(x) = v_\varepsilon^0(x)$,

$$v_\varepsilon^0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) v_0(y) dy = \phi_\varepsilon * v_0(x).$$

Olkoon

$$c_0 = (2\pi)^{n/2}, \text{ Tällöin}$$

$$\mathcal{F}(v_0 * \phi_\varepsilon) = c_0 \hat{v}_0(\xi) \cdot \hat{\phi}_\varepsilon(\xi).$$

Erikoisesti

$$c_0 \hat{\phi}_\varepsilon(\xi) \Big|_{\xi=0} = \int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{e^{-i0 \cdot x}}^1 \phi(x) dx = 1$$

Fourier-methode kettenteile saame

$$\begin{aligned} \|v^0 - v_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 &= \|\mathcal{F}(v^0 - v_\varepsilon^0)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \\ &= \|\widehat{v^0} - c_0 \widehat{\phi}_\varepsilon \cdot \widehat{v^0}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \end{aligned}$$

$$(1) \quad = \int_{\mathbb{R}^1} |1 - c_0 \widehat{\phi}_\varepsilon(\xi)|^2 \underbrace{|\widehat{v^0}(\xi)|^2}_{\in L^1(\mathbb{R}^1)} d\xi$$

N_{Y^+} $\widehat{\phi}_\varepsilon(\xi) = \widehat{\phi}(\varepsilon\xi)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$,
 joten $\widehat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ja

$$(2) \quad c_0 |\widehat{\phi}(\xi)| \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = 1$$

$$c_0 \widehat{\phi}(0) = 1,$$

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |c_0 \widehat{\phi}(\varepsilon\xi) - 1| = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Lebesgues dominointi konvergensilause
 (1), (2), (3):
 nojall.

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^0 - v_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v - v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad \square$$

1.2 Heikot derivaatat

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja

$$C^\infty(\Omega) = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid D^\alpha v \text{ on olemassa } \forall \alpha\},$$

$$\text{Supp}(v) = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}},$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(v) \subset \Omega$$

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid v \in L^p(K) \text{ on kompakti, k} \forall K \subset \subset \Omega\}.$$

Muistutamme, että jos $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ja

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, pätee

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} v(x) \cdot \phi(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx$$

Määr. 1.3 Olkoon $v, w \in L_{loc}^1(\Omega)$. Sanomme, että w on v :n heikko ∂_{x_j} -derivaatta, ja merkitsemme $w = D_j v$, jos kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx.$$

Lisäksi, $\tilde{w}$ on heikko ∂_x^α -derivaatta v :stä, $D^\alpha v = \tilde{w}$ jos

$$\int_{\Omega} \tilde{w}(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \partial_x^\alpha \phi(x) dx$$

Lemme 1.4 * Jos $D_j u = w_1$, $D_j u = w_2$, $w_1, w_2 \in L^1$
 niin $w_1 = w_2$.

tod Oletetaan $w = w_1 - w_2 \in L^1(\Omega)$. Kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} w \phi \, dx = \int_{\Omega} (w_1 - w_2) \phi \, dx = - \int_{\Omega} (u - u) \partial_{x_j} \phi \, dx = 0$$

kun $\phi(x) = \psi_\varepsilon(z - x) = \psi\left(\frac{z - x}{\varepsilon}\right)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$
 on

$$w^\varepsilon(z) := \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(z - x) w(x) \, dx = \int_{\Omega} \phi w \, dx = 0.$$

Funktio w^ε on w :n mollifikaatio, jolloin
 pätee $\textcircled{B}$ että $w^\varepsilon \rightarrow w$ $L^1(\tilde{\Omega})$ -konvergenssissa.

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w - w^\varepsilon\|_{L^1(\tilde{\Omega})} = 0, \text{ kaikilla } \tilde{\Omega} \subset \bar{\Omega} \subset \subset \Omega$$

Siihen $w = 0$.

Huom. Jos $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$, yllä (4):ssä voidaan käyttää
 Lemmää 1.2 B:ta. □

*: Lauseen voi sivuttaa jos Reaalianalyysi-kurssi ei
 ole suoritetu.

$\textcircled{B}$ Reaalianalyysi (E. Holopainen luentot), Lause 2.34.

ei Jos $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$, voidaan käyttää Lemmää 1.2.B.

Määr 1.5 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$

Funktio $u \in L^p(\Omega)$ on Sobolev-avaruudessa

$$W^{k,p}(\Omega)$$

Jos kaikilla $| \alpha | \leq k$ on heikot derivaatat $D^\alpha u$ olemassa, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, ja

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Kun $p=2$, merkitsemme

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega),$$

jolloin

$$(1) \quad \|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Listaus, $H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ on jatkossa
 $C_0^\infty(\Omega)$ sulkeuma $H^k(\Omega)$:ssä.

Huomautus:

Normi (1):ssä on sisätulo

$$\langle u, w \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha w} \, dx$$

määritelmä

Lemma 1.6 (Permanenzsukhsie)

1) $D^\alpha: H^k(\Omega) \rightarrow H^{k-|\alpha|}(\Omega), \quad k \geq |\alpha|, \text{ or jathura}$

2) $D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u, \quad u \in H^{|\alpha|+|\beta|}(\Omega),$

$$\alpha + \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

tot. Ht.

Lemma 1.7 Approx. $H^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ as Hilbert-approx.

tot. Oldhoch $u_j, j=1,2,\dots$ Cauchy-jona $H^k(\Omega):ss$,
Tallorin k achille $|\alpha| \leq k$

$$\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_l\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_j - u_l\|_{H^k} \xrightarrow{j,l \rightarrow \infty} 0$$

Jatua $D^\alpha u_j$ on Cauchy-jona $L^2(\Omega):ss$.

Kosha $L^2(\Omega)$ on f aydellika, or $f^\alpha \in L^2(\Omega)$

s.e. $D^\alpha u_j \rightarrow f^\alpha$ $L^2(\Omega):ss$, $\text{huk } j \rightarrow \infty$

Erikasent, $u_j \rightarrow f^0 =: u$ $L^2(\Omega):ss$, $\text{huk } j \rightarrow \infty$

Seuraavaksi näytämme, että $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ kaikilla $|\alpha| \leq k$, eli $u \in H^k(\Omega)$.

Kytk funktioille $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee $D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_j D^\alpha \phi \, dx$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u_j \cdot \phi \, dx$$

$$= \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} f^\alpha \cdot \phi \, dx$$

Joten u lla on heikot derivaatat

$$D^\alpha u = f^\alpha \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq k.$$

Siten $u \in H^k(\Omega)$. Koska

$$\|u_j - u\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_j - f^\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

pätee $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u$ $H^k(\Omega)$:ssä. $\square$

Seuraavaksi tarkastelemme $u \in H^k(\Omega)$:n
 approksimointia sillellä funktilla.

Lause 1.8 Olkoon $u \in H^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
 avoin, ϕ_ε , $\varepsilon > 0$ silottavia funktioita, j

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(y) u(x-y) dy, \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

j $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \subset \Omega$, Ω' avoin joukko. Silloin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon = u \quad H^k(\Omega') : \text{ssa}.$$

tod Kun $|q| \leq k$, todistamme, että

$$(5) \quad D^q u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) D^q u(y) dy \quad \Omega_\varepsilon : \text{ssa},$$

kun $x \in \Omega_\varepsilon$, $p \leq k$ ↑ heikko derivaatta
 ja $u \in H^k(\Omega)$ ↑ $u \in C^\infty(\Omega)$ ssa,

$$D_x^q u(x) = D_x^q \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

$$(6) \quad \begin{aligned} & \stackrel{\uparrow \text{HT}}{=} \int_{\Omega} D_x^q \phi_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ & = \int_{\Omega} (-1)^{|q|} D_y^q \phi_\varepsilon(x-y) \cdot u(y) dy \end{aligned}$$

Olkoon $x \in \Omega_\varepsilon$. Tällöin $\text{supp}(\phi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$, pätee
 funktiolle $\eta(y) = \phi_\varepsilon(x-y)$ $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Siiispä heikon derivaatan määritelmän nojalla,

$$\begin{aligned}
 D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D_Y^\alpha \eta(y) \cdot u(y) dy \\
 (7) \quad &= \int_{\Omega} \eta(y) D_Y^\alpha u(y) dy = \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) D_Y^\alpha u(y) dy \\
 &= (D_X^\alpha u)_\varepsilon(x), \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega)
 \end{aligned}$$

Erikoisesti, kaava (5) pätee $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Koska $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, pätee Lemma 1.2:n nojalla

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega')} = 0, \quad |\alpha| \leq k$$

Joten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(u - u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega')} = 0, \quad |\alpha| \leq k.$$

Siiispä

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u - u_\varepsilon\|_{H^k(\Omega')} = 0. \quad \square$$

Kun $x \in \Omega$, pätee $\eta(y) = \phi_\varepsilon$

$$\eta \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} C^j(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$$

$$\eta(x, y) = \phi_\varepsilon(x - y).$$

Tällöin (HT)

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} (\partial_x^\alpha \phi_\varepsilon)(x - y) u(y) dy, \quad x \in \Omega$$

joten

$$u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} C^j(\bar{\Omega}).$$

Kysymys: Miksi aiemmassa lauseessa ei valittu $\Omega' = \Omega$?

Vastaus: Kaava (7) ei ole voimassa yleisesti.

Lause 1.9 (Sobolev-funktioiden globaal.
approximaatio)

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu,
 $v \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Silloin on olemassa
 $v_j \in H^k(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ jälle

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v\|_{H^k(\Omega)} = 0,$$

eli. $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = v$ $H^k(\Omega)$:ssä.

Tod. Valitaan avoimet joukot

$$\Omega_j = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Tällöin $\Omega_j \subset \Omega$, $\overline{\Omega_j}$ on kompakti,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega.$$

Olkoon $V_j \subset \Omega$, $j=1,2,\dots$ Ω :n
avoim pte,

$$V_j = \Omega_{j+3} \setminus \overline{\Omega_{j+1}}, \quad j \geq 2$$

$$V_j = \Omega_4.$$

Tällöin on denassa V_j :n vastaus sille
yhtäsen ositus, eli $\eta_j(x)$ joille

$$(8) \begin{cases} 0 \leq \eta_j(x) \leq 1, & \eta_j \in C_0^\infty(V_j) \\ \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) = 1 & \text{kaikilla } x \in \Omega \end{cases}$$

(Olenessalo H^k)

Tällöin kaikilla $|k| \leq k$

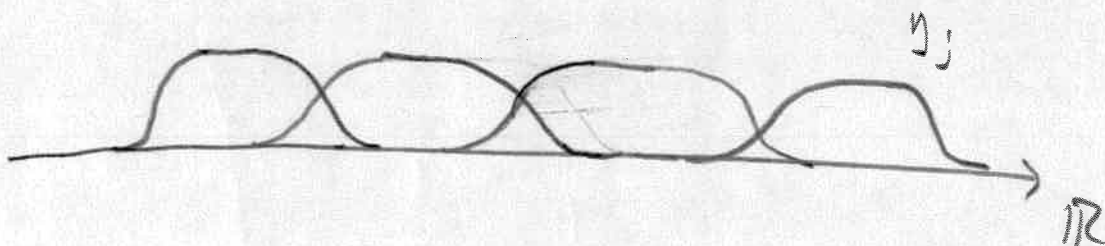
$$D^\alpha(\eta_j u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta_j \cdot D^{\alpha-\beta} u \in L^2(\Omega),$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 C_0^∞ L^2

Joten $\eta_j u \in H^k(\Omega)$, $\text{supp}(\eta_j u) \subset \overline{V_j}$.

$\forall k$ $\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \forall j \beta_j \leq \alpha_j$,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}$$



Valitaan $\delta > 0$.

Tämän jälkeen valitsemme kaikkille $j \in \mathbb{Z}_+$ niin pienet $\varepsilon_j > 0$, että funktioille

$$w_j(x) = \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon_j}(x-z) (\eta_j v)(z) dz$$

Pätee

$$\|w_j - \eta_j v\|_{H^k(\Omega)} < \frac{\delta}{2^j},$$

$$(8) \quad \text{supp}(w_j) \subset V_j + B(0, \varepsilon_j) \subset \Omega_{j+4} \setminus \overline{\Omega_j}$$

Olkoon $l \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j v = \sum_{j=1}^l \eta_j v_j \quad \Omega_l \text{:ssä,}$$

sillä $\eta_j v_j = 0$ Ω_l :ssä, kun $j > l$.

Määritellään nyt

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x), \quad x \in \Omega.$$

(8):n nojalla $w(x) = \sum_{j=1}^l w_j(x)$, $x \in \Omega_l$.

Koska $w_j \in C^\infty(\Omega)$, näemme, että $w|_{\Omega_l} \in C^\infty(\Omega_l)$, jolloin $w \in C^\infty(\Omega)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \|w - v\|_{H^k(\Omega_l)} &\leq \sum_{j=1}^l \|w_j - \eta_j v\|_{H^k(\Omega_l)} \\ &\leq \sum_{j=1}^l \|w_j - \eta_j v\|_{H^k(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^l \frac{\delta}{2^j} \leq \delta. \end{aligned}$$

Lebesguen monotonisen konvergensilauseen nojalla,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |D^k w - D^k v|^2 dx \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} 1_{\Omega_l}(x) |D^k w(x) - D^k v(x)|^2 dx \leq \delta^2$$

Josta seuraa $D^k w \in L^2(\Omega)$, mikä, eli $w \in H^k(\Omega)$, josta

$$\|w - v\|_{H^k(\Omega)} \leq \delta$$

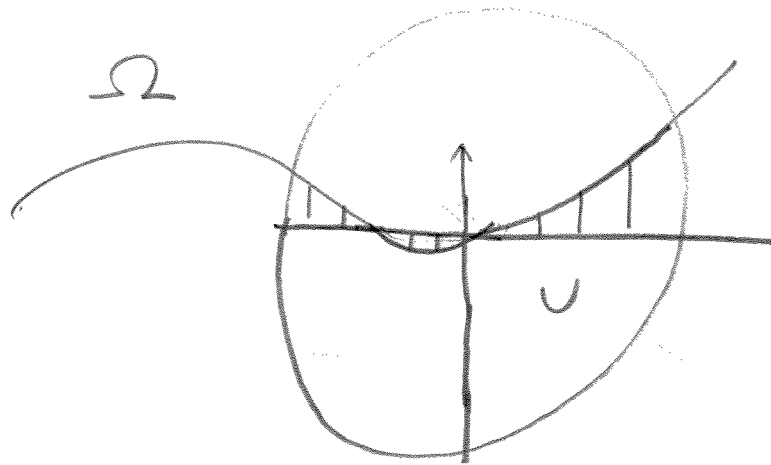
Koska $\delta > 0$ on mielivaltaisen pieni, seuraa $w \rightarrow v$.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Sanoimme,
 että $\partial\Omega$ on C^k -sileä, jos
 kaikilla $x^0 \in \partial\Omega$ on ympäristö $U \in B(x_0, \rho)$, $\rho > 0$,
 $\mathbb{R}^{h-1}$ ortonormaalien kannan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{h-1}$ määrännyt x_0 -keuhien
 koordinaatit.

$$Y_j: X \mapsto Y_j = \vec{v}_j \cdot (X - x^0), \quad Y(x) = (Y_j(x))_{j=1}^{h-1}$$

(10) Ja $C^k(\mathbb{R}^{h-1})$ -funktio $\gamma: \mathbb{R}^{h-1} \rightarrow \mathbb{R}$ jolle

$$\Omega \cap U = \{x \in U : Y_h(x) > \gamma(Y_1(x), \dots, Y_{h-1}(x))\}$$

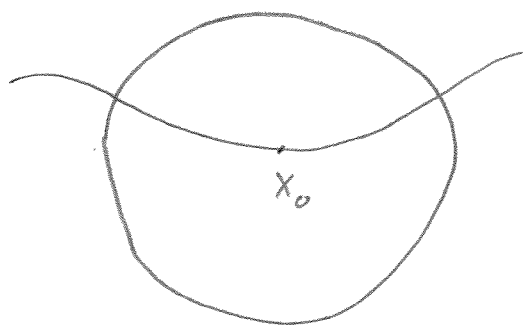


Merkitsemme $X = (X', X_h)$, $Y = (Y', Y_h) \in \mathbb{R}^{h-1} \times \mathbb{R}$.
 Jos Ω :n reuna on C^1 -sileä,
 sillä on normaali-vektori X_0 :s, j.

$$v(x^0) = \sum_{j=1}^{h-1} (\partial_{Y_j} \gamma)(0) \cdot \vec{v}_j - \vec{v}_h.$$

Reunan suoristus

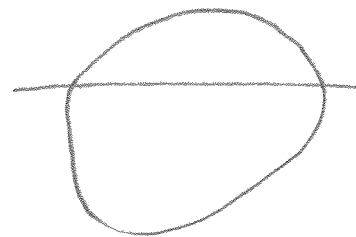
$$U = B(x_0, r)$$



y -coordinates



$\tilde{U}$



$\tilde{y}$ -coordinates

Määritellään kuvaus

$$\Phi(y) = (\Phi^1(y), \dots, \Phi^n(y))$$

$$\Phi^j(y_1, \dots, y_n) = y_j, \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$\Phi^n(y_1, \dots, y_n) = y_n - \gamma(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

jä

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = \Phi(y)$$

Tällöin $\Phi: U \rightarrow \Phi(U) = \tilde{U}$ on C^k -kuvaus.

Määritellään $\Psi: \tilde{U} \rightarrow U, \quad \Psi = \Phi^{-1}$

$$\Psi^j(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = \tilde{y}_j, \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$\Psi^n(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = \tilde{y}_n + \gamma(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}).$$

Myös Ψ on C^k -kuvaus. Havaitsemme, että

$$\det D\Psi = \det D\Phi = 1,$$

$$\text{jä } \Phi(U \cap \Omega) = \tilde{U} \cap \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_n > 0\}.$$

Lause 1.10 (Sobolev funktioiden approksimaatio
reunalla ast.)

Olkoon Ω rajoitettu ja avoin, $\partial\Omega$ C^1 -sileä,
 $u \in H^k(\Omega)$. Silloin on olemassa
 $u_j \in H^k(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$, joille

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u \quad H^k(\Omega) \text{-ssä.}$$

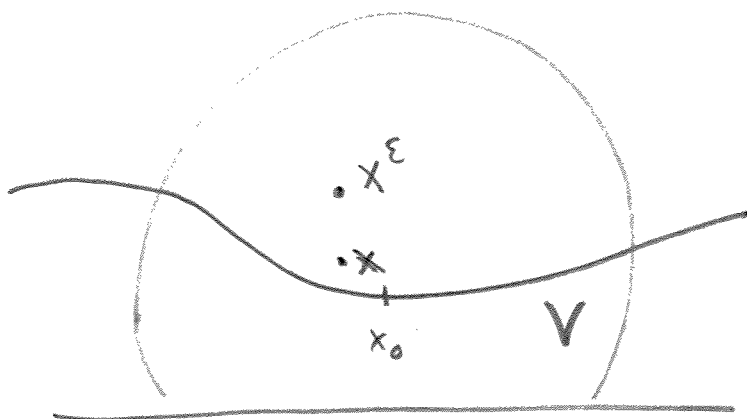
Tod. Olkoon $x_0 \in \partial\Omega$, $Y(x)$, $\vec{V}_j$, $U = B(x_0, \rho)$, $0 < \rho < 1$
ja $\gamma(Y')$ kuten (10):ssä, $Y = (Y', Y_n)$.

Olkoon $\tilde{U} = B(x_0, \rho/2)$ ja $V = \tilde{U} \cap \Omega$.
Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi $\vec{V}_j = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$, $Y_j = x_j$.
Määritellään pisteen siirto.

$$T^\varepsilon x := x^\varepsilon = x + \lambda \varepsilon e_n, \quad x \in V, \quad \varepsilon > 0$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

missä

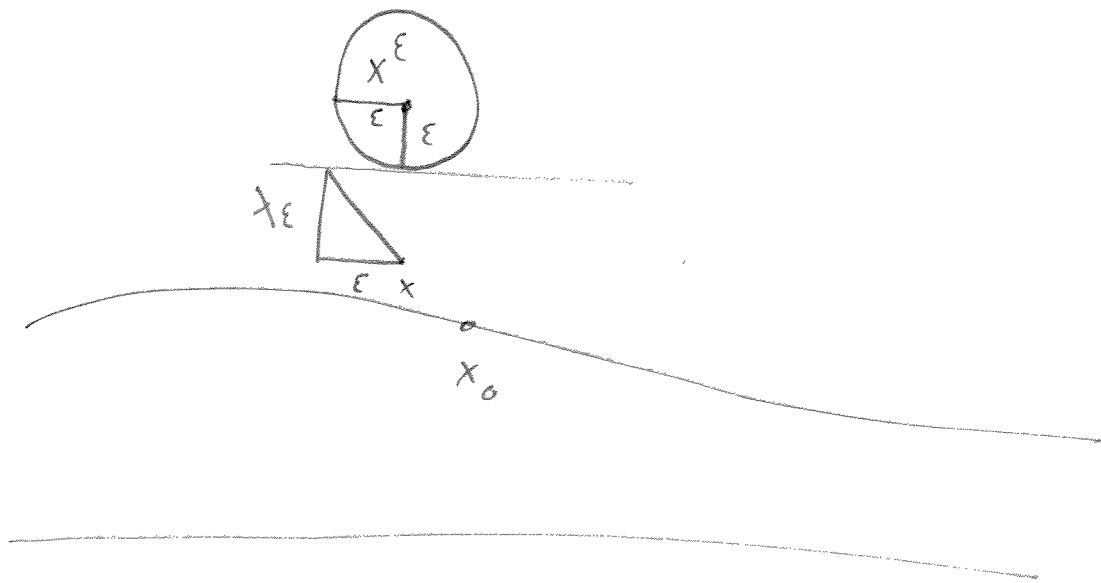


$\lambda > 0$ on niin suuri, että on olemassa $\varepsilon_0 > 0$

$$x \in \Omega \cap B(x_0, \frac{p}{2}) \Rightarrow B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subset B(x_0, p) \cap \Omega$$

kun $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Esimerkiksi;

$$\lambda > \max_{|y'| \leq \frac{p^2}{3}} \|\nabla_{y'} \gamma(y')\| + 1$$



Joten kun $|\alpha| \leq k$, $x \in V$

$$\begin{aligned}
 D^\alpha w^\varepsilon(x) &= \int_V \partial_x^\alpha (\phi^\varepsilon(x^\varepsilon - y)) \cdot D^\alpha v(y) dy = \\
 &= \int_V (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha [\phi(x^\varepsilon - y)] v(y) dy = \int_V \phi_\varepsilon(x^\varepsilon - y) D^\alpha v(y) dy \\
 &= \int_V \phi_\varepsilon(x^\varepsilon - y) f^\alpha(y) dy \\
 &= \phi_\varepsilon * (f^\alpha \circ T^\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon^\alpha &= \|D^\alpha v - D^\alpha w^\varepsilon\|_{L^2(V)} \leq \|f^\alpha - \phi_\varepsilon * (f^\alpha \circ T^\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\
 &\leq \|f^\alpha - \phi_\varepsilon * f^\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} + \|\phi_\varepsilon * (f^\alpha - (f^\alpha \circ T^\varepsilon))\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\
 &= J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

Lemmat 1.2 B:n nojalla $J_\varepsilon^1 \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lisäksi, $v \in L^2(\mathbb{R}^1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \|\phi_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} &= c \|\hat{\phi}_\varepsilon \cdot \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leq \underbrace{\sup_s |c \cdot \hat{\phi}_\varepsilon|}_= 1 \cdot \|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\
 &\leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}
 \end{aligned}$$

missä $c = (2\pi)^k$

Jolloin $w^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $v \in H^1(\Omega)$.

Valitaan kaikille $x \in \partial\Omega$ ympäristö $V(x) = B(x, \frac{P(x)}{2})$.

Jolle (10) on voimassa. Koska $\partial\Omega$ on

kompakti, voidaan valita pistet $x_1, x_2, \dots, x_N \in \partial\Omega$,

jolle pätee

$$V_j = V(x_j, \frac{P(x_j)}{2})$$

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N V_j = W$$

Olhoon $V_0 \subset \Omega$ avoin, $\bar{V}_0 \subset \Omega$ s.e.

$$\bigcup_{j=0}^N V_j \supset \Omega,$$

Ja olhoon

Jolle

$\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N \in C^\infty(\bar{\Omega})$, funktioita,

$$\text{supp}(\eta_j) \subset V_j,$$

$$\sum_{j=1}^N \eta_j(x) = 1 \quad \text{kaikille } x \in \bar{\Omega}.$$

Olhooa $\delta > 0$. $\forall \alpha, \text{ taan}$ niia pteet $\varepsilon_j > 0$,
 $j = 0, 1, \dots, N$ ette seurvast ehto otat
 valmassa: (H+)

$$V_0(x) = \phi_{\varepsilon_0} * (\eta_0 \cdot \tilde{u})(x), \quad x \in \Omega$$

$$\text{supp}(V_0) \subset V_0, \quad \|V_0 - \eta_0 \cdot \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < \frac{\delta}{N+1}$$

$$V_j(x) = \phi_{\varepsilon_j} * ((\eta_j \cdot \tilde{u}) \circ T^{\varepsilon_j})(x), \quad x \in \Omega$$

$$\text{supp}(V_j) \subset V_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\|V_j - \eta_j \cdot \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < \frac{\delta}{N+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Tällöin

$$V = \sum_{j=0}^N V_j \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

$$\|V - \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < (N+1) \cdot \frac{\delta}{N+1} = \delta.$$

□

Seuraavaksi Sobolev funktioiden laajennuslause:

Lause 1.11 Olkoon $\Omega \subset B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ avoin,
 $\partial\Omega \in C^k$ sille $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin on olemassa kuvaus

$$E: H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n)$$

jolle valitaan $C_0 > 0$, s.e. kun $u \in H^k(\Omega)$,

(i) $Eu = u$ m.k. Ω :ssä

(ii) $\text{supp}(Eu) \subset B(0, R+1)$

(iii)

$$\|Eu\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

Tod. Olkoon $x^0 \in \partial\Omega$. Oletetaan aluksi,
 että on $p > 0$ s.e.

$$\Omega \cap B(x_0, p) = \underbrace{(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)}_{=: B_+} \cap B(x_0, p)$$

j.e.

$$u \in C^\infty(\overline{B_+})$$

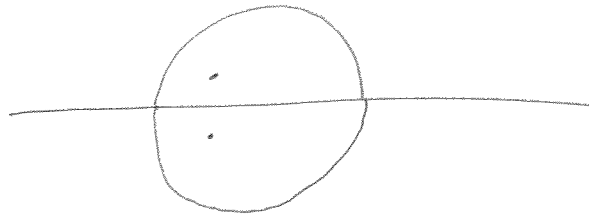
Merkittäen

$$B_- = (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_-) \cap B(x_0, p)$$

$$B = B(x_0, p).$$

Kun $k=1$, määritellään

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \bar{B}_+ \\ -3v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4v(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}), & x \in B_- \end{cases}$$



Tällöin toispuolisille derivatoille

$$\partial_{x_n} v \Big|_{x_n=0+} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (v(x', h) - v(x', 0))$$

pitää (HT)

$$\partial_{x_n} v \Big|_{x_n=0+} = \partial_{x_n} v \Big|_{x_n=0-},$$

Joten osittaisderivaatat $\partial_{x_n} v$ on klassisessa mielessä olemassa. Havaitsemme, että kaikki osittaisderivaatat $\partial_{x_j} v(x)$ ovat olemassa pisteittäin, ja jatkuvasti funktioita $\bar{B}_+$:ssä ja $\bar{B}_-$:ssä. Tästä seuraa, että $v \in C^1(\bar{B})$ (ja että v on differentiaalissa kaikkien pisteiden $x \in \bar{B}$), joten $\bar{v} \in H^1(B)$

Havaitsumma, että

$$D_j \bar{u}(x) = -3 \partial_{x_j} u(x', -x_n) + 4 \partial_{x_j} u(x', -x_n/2), \quad x \in B_-$$

$$D_j \bar{u}(x) = +3 \partial_{x_n} u(x', -x_n) - 2 \partial_{x_n} u(x', -x_n/2), \quad x \in B_-$$

Joten

$$\|D\bar{u}\|_{L^2(B_-)} \leq 7 \|Du\|_{L^2(B_+)}.$$

Siksi

$$\|\bar{u}\|_{H^1(B)} \leq 8 \|u\|_{H^1(B_+)}.$$

Tapaus $k > 1$ käytemme jatkos

$$(A) \quad \bar{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{B^+}, \\ \sum_{j=0}^k a_j u(x', -\frac{x_n}{j+1}), & x \in B_- \end{cases}$$

Jossa a_j valitaan siten, että

$$\sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{j+1}\right)^l a_j = 1, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Tämä yhtälöryhmä on aina ratkaissu (t+1)
(c.f. Vandermonde matriisi), jö

= 32 =

pitää, että kun $u \in C^\infty(\bar{B}_+)$,

$$\bar{u} \in E^k(\bar{B}),$$

$$\|\bar{u}\|_{H^k(B)} \leq C_k \|u\|_{H^k(B_+)}$$

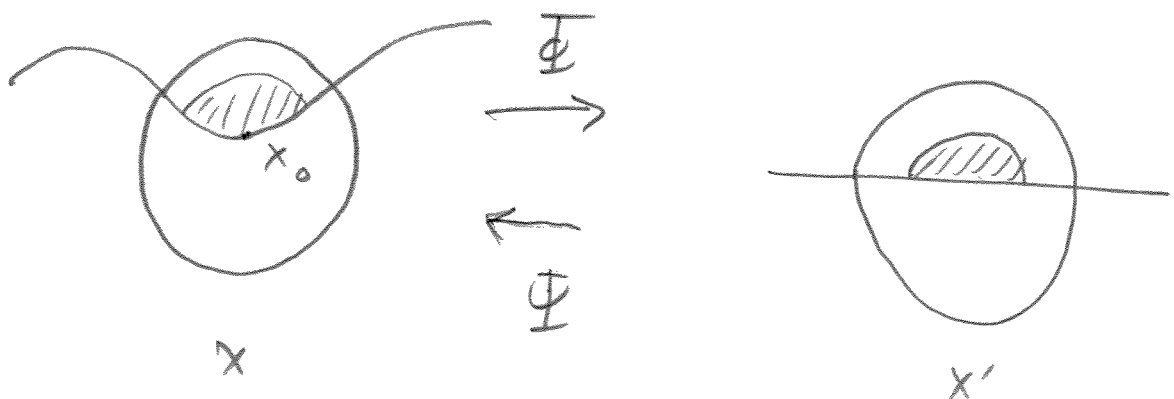
Tarkastellaan seuraavaksi tapaus, jossa $\partial\Omega$ ei ole litteä, mutta pisteellä $x_0 \in \partial\Omega$ on ympäristö $V \subset \mathbb{R}^n$ s.e. on C^k -sileät kuvaukset

$$\Phi: V \rightarrow \tilde{V} = B(0; \rho) = B$$

$$\Psi: \tilde{V} \rightarrow V$$

jolle $\Phi^{-1} = \Psi$, $\Phi: V \cap \Omega \rightarrow B_+ = B \cap \mathbb{R}_+^n$.

Kun $W = \text{supp}(u) \subset \bar{\Omega} \cap W$, $u \in C^\infty(\bar{V})$,
 $W \subset \bar{W} \subset V$ avoim



Käytämme ketjusääntöä

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_j'} (u \circ \Psi(x')) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^k}(\Psi(x')) \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_j'}(x'),$$

ja tietoa että kun $W \subset \subset V$, $W' \subset \subset V'$, on $C, C' > 0$ s.e.

$$|\partial_{x'}^\alpha \Psi(x)| \leq C', \quad |\alpha| \leq k, \quad x' \in W' \cap \overline{B}_+^+$$

$$|\partial_x^\alpha \Phi(x)| \leq C, \quad |\alpha| \leq k, \quad x \in W \cap \overline{\Omega}$$

Tästä näemme, että kaikk. $W \subset \subset V$ on s.e. $C_1, C_2 > 0$ s.e.

$$(10) \quad C_1 \|u\|_{H^k(\Omega)} \leq \|u'\|_{H^k(B_+^+)} \leq C_2 \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

Kun $u \in H^k(\Omega)$,

$$\text{supp}(u) \subset W \cap \overline{\Omega}$$

$$u' = u \circ \Psi$$

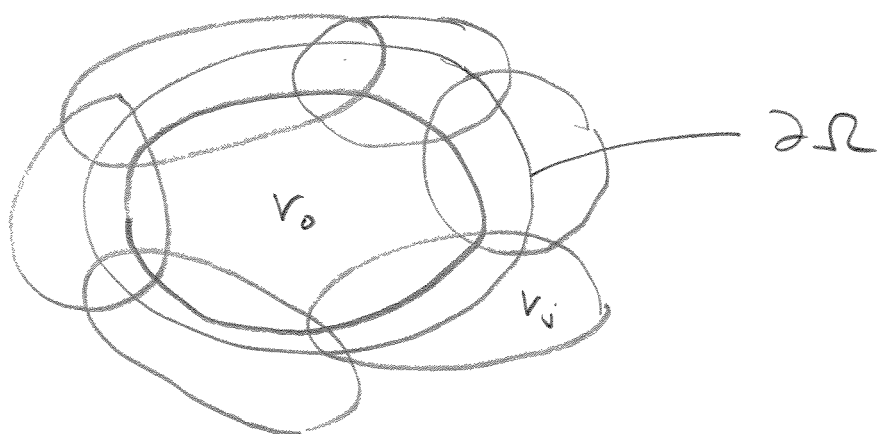
Samaan, kun $\tilde{W} = \Phi(W) \subset \subset \tilde{V}$ ja $\text{supp}(v) \subset W$

$v' = v \circ \Phi$, $\text{supp}(v') \subset \tilde{W}$, on $C'_1, C'_2 > 0$ (riippuvat W -stä) s.e.

$$C'_1 \|v\|_{H^k(V)} \leq \|v'\|_{H^k(\tilde{V})} \leq C'_2 \|v\|_{H^k(V)}.$$

Olkoon nyt Ω C^k -reunainen alue,
 ja $V_j \subset \mathbb{R}^n$ reunaan avoin pte, $j=1, \dots, N$,
 s.e. reuna voidaan suoristaa C^k -kuvarahall,
 Φ_j, Ψ_j kussakin V_j :ssä, ja $V_0 \subset \Omega$
 avoin joukko s.e. $\overline{V_0} \subset \subset \Omega$,

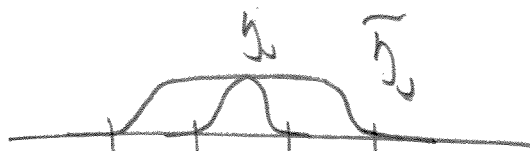
$$\bigcup_{j=0}^N V_j = \Omega, \quad \text{diam}(V_j) < 1, \quad j=1, \dots, N$$



Valitaan $\eta_j \in C_0^\infty(V_j)$ s.e.

$$\sum_{j=0}^N \eta_j(x) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Olkoon $\tilde{\eta}_j \in C_0^\infty(V_j)$, $\tilde{\eta}_j|_{\text{supp}(V_j)} = 1$



N_{γ} vainne määritellään kuvauksella

$$E: v \mapsto \sum_{j=1}^N \tilde{\eta}_j \left(\left(E_0((\eta_j v) \circ \psi_j) \right) \circ \Phi_j \right) + \eta_0 v,$$

missä $E_0: C^\infty(\overline{B}_+) \rightarrow C_0^\infty(\overline{B})$

on kuvaus $E_0 v = \bar{v}$, kts. (A), p. 32.

$$E: C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^k(\mathbb{R}^n),$$

$$\|E v\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|v\|_{H^k(\Omega)}$$

Jollakin $C > 0$. Koska $C^\infty(\overline{\Omega})$ on

$H^k(\Omega)$:n tiheä osajoukko, E laajenee yksikäsitteiseksi tavalle jatkuvaksi kuvaukseksi

$$E: H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n).$$

Koska $E v|_\Omega = v$ pätee $C^\infty(\overline{\Omega})$:ssä se pätee kaikilla $v \in H^k(\Omega)$

Sanoik, kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
 $\text{supp}(\phi) \cap B(0, R+1) = \emptyset$

pätee

$$\langle E u, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Tämä pätee kaikilla $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, ja jatkuvuuden
 nojalla kaikilla $u \in H^k(\Omega)$. Tästä seuraa, että

$$\text{supp}(E u) \subset \overline{B(0, R+1)}, \quad u \in H^k(\Omega)$$

□

yllä tarvitaan

Lemme (Ht) Jos X, Y ovat

Banach-avaruuksia.

$Z \subset X$ tiheä aliavaruus
 Jos $T: Z \rightarrow Y$ lineaarinen kuvaus, jolle

$$\|Tz\|_Y \leq C \|z\|_X, \quad z \in Z$$

niin T laajenee yksikäsitteiseksi tavell,
 kuvaus $T^e: X \rightarrow Y$, $T^e|_Z = T$,

$$\|T^e x\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

Sobolev-avaruus $\mathbb{R}^n$: ssa.

Plancherelin kaava $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Jos kaava $\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$ kosoll. funktioille
 $u \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$(II) \quad = \sum_{|\alpha| \leq k} \| \xi^\alpha \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

$$\asymp \| \langle \xi \rangle^k \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

Lemma 1.12 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on tiheä osajoukko
 $H^k(\mathbb{R}^n)$: ssa.

Tod 1) kun $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, on pisteittainen
 tulo $\psi(\tilde{\varepsilon}x) \cdot u(x) \in H^k(\mathbb{R}^n)$

$$\psi(\tilde{\varepsilon}x) \cdot u(x) \in H^k(\mathbb{R}^n),$$

kun $\psi \in C_0^\infty(B(0,2))$, $\psi|_{B(0,1)} = 1$,
 Suora lasku osoittaa (H1), että (H1)

$$\lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \| \psi(\tilde{\varepsilon}x) u - u \|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = 0$$

2) Olhoon $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$.

Valitaan $\tilde{\varepsilon} > 0$ s.e. funktiolla

$$w(x) = \psi(\tilde{\varepsilon}x)u(x)$$

pätee

$$\|u - w\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{supp}(w) \subset B(0, R), \quad R := 2/\tilde{\varepsilon}.$$

Valitaan Lauseen 1.2 avulla $\varepsilon \in (0, 1)$ siten, että

$$\begin{aligned} \|w - \phi_\varepsilon * w\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} &= \|w - \phi_\varepsilon * w\|_{H^k(B(0, R+1))} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tällöin $\phi_\varepsilon * w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\phi_\varepsilon * w - u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Korollari 1.13 Fourier muunnos $\mathcal{F}$

lassee yhäksittiselle tavalle isometrisen isomorfismin

$$\mathcal{F}: H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \langle \xi \rangle^{2s} d\xi), \\ \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\langle \xi \rangle^{2s} d\xi)} = \|u\|_{H^s}$$

Tod Koske $S(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on tiheä, väite seuraa kaavasta (11). $\square$

Määr 1.14 kun $s \in \mathbb{R}_+$, määritellään

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$$

$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2$

Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin,

$$H^s(\Omega) = \{ u|_\Omega \mid u \in H^s(\mathbb{R}^n) \}$$

$$\|w\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{u|_\Omega = w} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Lause 1.15 Olkoon $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^h)$,

$$Iu = u, \quad I: C_0^\infty(\mathbb{R}^h) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^h),$$

missä

$$C_b(\mathbb{R}^h) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^h) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^h} |u(x)| = \|u\|_\infty < \infty \right\}.$$

Kun $s > \frac{h}{2}$, I on laajennus

$$I: H^s(\mathbb{R}^h) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^h)$$

Tästä seuraa, että kaikilla $u \in H^s(\mathbb{R}^h)$ on
 $w \in C_b(\mathbb{R}^h)$ s.e. $u(x) = w(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^h$.
Kirjoitamme tämän useita muotoja: $H^s(\mathbb{R}^h) \subset C_b(\mathbb{R}^h)$

Tod. Olkoon $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^h)$, $c = (2\pi)^{h/2}$. Tällöin

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^h} \left| c^{-1} \int_{\mathbb{R}^h} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right|$$

$$\leq c^{-1} \cdot \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^h)} = c^{-1} \int_{\mathbb{R}^h} |\hat{f}(\xi)| d\xi$$

$$\leq c^{-1} \int_{\mathbb{R}^h} \langle \xi \rangle^{-s} \cdot \langle \xi \rangle^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq c^{-1} \cdot \|\langle \xi \rangle^{-s}\|_{L^2(\mathbb{R}^h)} \cdot \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^h)}$$

↑
Cauchy-Schwartz

$$\leq C^{-1} \cdot C_1 \cdot \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{missa}$$

$$C_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-s} dx$$

$$\leq C' \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+r^2} \right)^{-s} r^{n-1} dr$$

$$\leq C'' + C'' \cdot \int_1^\infty r^{-2s+n-1} dr < \infty,$$

kuva $-2s+n-1 < -1$, eli $s > \frac{n}{2}$.

Kosha $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^n(\mathbb{R}^n)$ os taker,
vrite seura.

Korollari 1.16 Olkoon $s > \frac{n}{2} + k$.

Tällöin

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_b^k(\mathbb{R}^n),$$

$$C_b^k(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^k(\mathbb{R}^n) \mid \forall |\alpha| \leq k \quad D^\alpha f \in C_b(\mathbb{R}^n) \}$$

Korollari 1.17 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin,

rajoitettu, $\partial\Omega \in C^k$ -sileä, ja $l \in \mathbb{N}$,

$$l > \frac{n}{2} + k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tällöin

$$H^k(\Omega) \subset C^l(\bar{\Omega})$$

Tod Väite seuraa lauseesta 1.11 ja kor.

1.16. $\square$

Ilman todistusta mainitsimme, että kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$H^s(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \text{kun} \quad s - \frac{n}{2} > 0 - \frac{n}{p}$$

$$W^{s,p}(\Omega) \subset W^{\tilde{s},\tilde{p}}(\Omega) \quad \text{kun} \quad s > \tilde{s},$$

$$s - \frac{n}{p} > \tilde{s} - \frac{n}{\tilde{p}}.$$

Trace - lause

Lause 1.18 Olkoon $s > 1/2$. Tällöin

Trace-kuvaus

$$T_0: C_0^\infty(\mathbb{R}^h) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{h-1})$$

$$(T\phi)(x') = \phi(x', 0), \quad x' \in \mathbb{R}^{h-1}$$

laajenee jatkuvaksi kuvaukseksi

$$T_0: H^s(\mathbb{R}^h) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{h-1})$$

Huomautus: T on surjekttiivinen kuvaus [RR, 6.6.4]

Tod Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^h)$, $g(x') = \phi(x', 0)$

Määritellään niiden muuttujien suhteen Fourier-muunnos

$$\tilde{\phi}(x', \xi_h) = \left(\int_{x_h \rightarrow \xi_h} \phi \right)(x', \xi_h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_h \cdot \xi_h} \phi(x', x_h) dx_h$$

Tällöin

$$g(x') = \phi(x', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0 \cdot \xi_h} \tilde{\phi}(x', \xi_h) d\xi_h$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(x', \xi_h) d\xi_h.$$

Tallor Fourier-munko totetthar

$$\hat{g}(s') = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(s', s_n) ds_n, \quad s' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$\uparrow$ $\mathcal{F}_{n-1} g = (n-1)$ -ulot Fourier-munko
 $\uparrow$ $\mathcal{F}_n \phi = n$ -ulot eiker F-munko

Ja saannu

$$\|g\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|s'|^2)^{s-1/2} |\hat{g}(s')|^2 ds'$$

$$\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|s'|^2)^{s-1/2} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(s', s_n) ds_n \right|^2 ds'$$

$\nwarrow \hat{\phi} = \langle s \rangle^{-s/2} \cdot (\langle s \rangle^{s/2} \hat{\phi})$

$$\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[(1+|s'|^2)^{s-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|s'|^2 + |\tilde{\eta}|^2)^{-s} d\tilde{\eta} \right) \right]$$

$\uparrow$ Cauchy-Schwartz

$$\cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|s'|^2 + |\eta|^2)^s |\hat{\phi}(s', \eta)|^2 d\eta \right) ds_n$$

N_y mutavariabeli, $\tilde{y} = (1 + |g'|^2)^{1/2} y$ (g' on kullu
vähä)

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |g'|^2 + |\tilde{y}|^2)^{-s} d\tilde{y}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [(1 + |g'|^2)(1 + |y|^2)]^{-s} \cdot (1 + |g'|^2)^{1/2} dy$$

$$= (1 + |g'|^2)^{-s+1/2} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (1 + |y|^2)^{-s} dy}_{= C_s < \infty \text{ kuskal } s > \frac{1}{2}}$$

Suure $g = T_0 \phi$ alla pitee

$$\|T_0 \phi\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

$$\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |g'|^2)^{s-1/2} \cdot C_s (1 + |g'|^2)^{-s+1/2} \cdot (1 + |g'|^2 + |y|^2)^s |\phi(g', y)|^2 dg' dy$$

$$\leq C_1 C_s \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2$$

Väite kehtib, kuskal $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$
on täiesti okeine. $\square$

Lemma 1.19 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^h$ avoin,
 rajoitettu, j $\ddot{a}$ $\partial\Omega$ C^k -sileä.

Sanomme, että $u \in H^s(\partial\Omega)$, $0 \leq s \leq k$,
 jos on olemassa $\partial\Omega$:n äärellinen
 avoin peite V_j , $j=1, \dots, N$ j $\ddot{a}$
 reunasitistyskuvaukset

$$\Phi_j : V_j \rightarrow B(0, P_j) \subset \mathbb{R}^h \text{ bijectio,}$$

$$\Phi_j : V_j \cap \Omega \rightarrow B(0, P_j) \cap \mathbb{R}_+^h$$

s.e. Φ_j , $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$ ovat C^k -sileitä,
 j $\ddot{a}$ sileä ykkösten osituksella $\eta_j \in C_0^\infty(V_j)$,

$$\sum_{j=1}^N \eta_j(x) = 1, \quad x \in \partial\Omega$$

siten, että

$$\tilde{u}_j = (\eta_j \cdot u) \circ \Phi_j^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^{h-1}),$$

n $\ddot{a}$ s $\ddot{a}$ $\text{supp}((\eta_j \cdot u) \circ \Phi_j^{-1}) \subset B_{h-1}(0, P_j) \subset \mathbb{R}^{h-1}$,
 j $\ddot{a}$ $\tilde{u}_j$ on s $\ddot{a}$ m $\ddot{a}$ itett $\ddot{a}$ n $\ddot{a}$ l $\ddot{a}$ j $\ddot{a}$ tt $\ddot{a}$ h $\ddot{a}$ tt $\ddot{a}$ k $\ddot{a}$ ns $\ddot{a}$ s

Lause 1.20 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu, $\partial\Omega$ C^k -sileä, $\frac{1}{2} \leq k \leq \infty$.
Tällöin kuvaukset

$$T_0: C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\partial\Omega)$$

$$\phi \mapsto \phi|_{\partial\Omega}$$

laajenevat jatkuvasti kuvauksiksi

$$T_{2s}: H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega),$$

ja merkitsemällä

$$T_{2s} v = v|_{\partial\Omega}.$$

Teol $(H^1)^*$ tms $[RR, lkn 6.109]$
mutatis mutandis.

2. Elliptiset ODY:t

Tarkastelemme reuna-arvo-ongelman

$$Lu = f \quad \Omega \text{:ssä},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^h$ on avoin ja rajoitettu, $\partial\Omega \in C^1$,
ja L on 2:n kertaluvun operaattori,

(14)

$$Lu(x) = - \sum_{j,k=1}^h \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{j=1}^h b^j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u,$$

$$x \in \Omega$$

tai

(15)

$$Lu = \sum_{j,k=1}^h a^{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(x) + \sum_{j=1}^h \tilde{b}^j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x).$$

Kirjoittamalla kaavat (14) esseen

$$Lu = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{metriikka}}}{\nabla \cdot a} \nabla u + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektori}}}{b \cdot \nabla} u + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalaari}}}{cu},$$

Sanomme, että (15) on elliptinen, jos
 $a^{jk}(x), b^j(x), c(x) \in L^\infty(\Omega)$ ja on
 vakio $C_1 > 0$ s.e.

$$(E) \quad \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x) \varphi_j \overline{\varphi_k} \geq C_1 |\varphi|^2 \text{ m.k. } x \in \Omega$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty$

$$|\varphi| = (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \dots + |\varphi_n|^2)^{1/2}$$

Oletetaan lisäksi, että $a^{jk}, b^j \in C^\infty(\overline{\Omega})$,
 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ja (klassisesti)

$$Lu = f$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Tällöin kaikille $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee

$$\begin{aligned} \langle Lu, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-\nabla \cdot a \nabla u + b \cdot \nabla u + cu) \cdot \phi \, dx \\ &= \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx + \int_{\Omega} ((b \cdot \nabla u) \phi + cu \phi) \, dx + \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u \cdot a \nabla u}_{=0} \cdot \underbrace{\phi}_{=0} \, dS, \end{aligned}$$

niissä v on $\partial\Omega$:n normaali-vektori: (ulospiik-
osittainen,
Siiis samaan heliömuotoon $\|v\|_{\mathbb{R}^3}=1$)

$$L[v, \phi] := \int_{\Omega} (a \nabla v \cdot \nabla \phi + b \nabla v \cdot \phi + c v \phi) dx$$

Yhtälön

$$L(v, \phi) = \int_{\Omega} f \cdot \phi dx \quad \text{kaikilla } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Seuraavaksi tarkastelemme tapaus, jossa,
 $v \in H_0^1(\Omega) = \text{cl}_{H^1} (C_0^\infty(\Omega))$

Lemma 2.1 Ω rektangel, gjev,
 $\partial\Omega$ C^1 -slutt, $u, w \in H^1(\Omega)$

Tallorin

$$(6) \int_{\Omega} \partial_{x_j} u \cdot w \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot \partial_{x_j} w \, dx + \int_{\partial\Omega} \nu_j u|_{\partial\Omega} \cdot w|_{\partial\Omega} \, dS$$

missa ν_j og ν via x_j -komponenten, dS er
 $\partial\Omega$ er pinstang. Lissakvis, kun $u \in H_0^1(\Omega)$,
 $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Tilf. Kun $u, w \in C^\infty(\bar{\Omega})$, kare (6)

Påter. Kun $u, w \in H^1(\Omega)$ s. $u_n \rightarrow u$, $w_n \rightarrow w$
 $H^1(\Omega)$: s. kun $n \rightarrow \infty$, nærmere, etc.

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} u \cdot w \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \partial_{x_j} u_n \cdot w_m \, dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} - \int_{\Omega} u_n \cdot \partial_{x_j} w_m \, dx + \int_{\partial\Omega} \nu_j u_n w_m \, dS$$

$$= - \int_{\Omega} u \cdot \partial_{x_j} w \, dx + \int_{\partial\Omega} \nu_j u|_{\partial\Omega} \cdot w|_{\partial\Omega} \, dS.$$

§5 ii) (1.6) pöytätehtävä kokeen $v|_{\partial\Omega} = 0$

hahvilla $v \in C_0^\infty(\Omega)$ j. $H_0^1(\Omega) = \text{cl}_{H^1}(C_0^\infty(\Omega))$,

$v \mapsto v|_{\partial\Omega}$ on jatkuva, joten

$v|_{\partial\Omega} = 0$ kun $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Määritelmä 2.2 1) Olkoon $a^{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_j, c \in C(\bar{\Omega})$, $f \in C(\bar{\Omega})$

Silloin $u \in C^2(\bar{\Omega})$ on yhtälön

$$(17) \quad Lu = F \quad \Omega:ssä$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

klassinen ratkaisu, jos (17) toteutuu

kaikissa pisteissä $x \in \Omega$ j. $u(y) = 0$, $y \in \partial\Omega$.

2) Olkoon $a^{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_j, c \in C(\bar{\Omega})$, $f \in L^2(\Omega)$.

Silloin $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ on yhtälön (17)

vakua ratkaisu, jos

$$\sum_{j,k=1}^n \partial_{x_j} (a^{jk}(x) \partial_{x_k} u(x)) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u(x) + c(x) u(x) = f(x)$$

toteutuu m.h. $x \in \Omega$, j. derivaatit ovat määriteltäviä heikkoina derivaattoina.

3) Olkoon $a^{ij}, b^j, c \in L^\infty(\Omega)$ funktioita,
 a^{ij} toteuttavat elliptisyys ehdot (E), $f \in L^2(\Omega)$

Silloin $u \in H_0^1(\Omega)$ on yhtälön (17)
heikko ratkaisu jos

(18)

$$L[u, \phi] = \int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla \phi + b \nabla u \cdot \phi + c u \phi) dx$$

$$= \int_{\Omega} F \phi dx$$

kaikille $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Huomautus, yllä 3):ssä riittää vaatia, että

(18) on voimassa kaikille $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Lisäksi määritelmä voidaan laajentaa tapausseksi

jossa $F \in (H_0^1(\Omega))'$. Tati käsitellään
 myöhemmin.

Olemassaolotulos

Lause 2.2 (Lax-Milgram)

Olkoon H (reaalinen) Hilbert-avaruus ja

$$B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

bi-lineaarinen, jolle on $\alpha, \beta > 0$ s.e.

$$|B[u, w]| \leq \alpha \|u\| \cdot \|w\|, \quad u, w \in H$$

$$B[u, u] \geq \beta \|u\|^2, \quad u \in H.$$

Olkoon $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu lineaarinen.

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $u \in H$ jolle

$$B[u, \phi] = F(\phi) \quad \text{kaikille } \phi \in H.$$

Lisäksi

$$\|u\| \leq \frac{1}{\beta} \|F\|$$

Teod. 1) Olkoon $u \in H$ "kiinnitetty". Tällöin
kuvauk

$$T: w \mapsto B[u, w]$$

on lineaarinen ja rajoitettu $T: H \rightarrow \mathbb{R}$, ja
Rieszin esityslauseen nojalla on yksikäsitteinen
 $a \in H$ jolle

$$Tw = (a, w)_H \quad \text{käihille } w \in H.$$

Merhitään

$$Au = a.$$

Tällöin

$$B[u, w] = (Au, w)_H \quad \text{käihille } u, w \in H.$$

2) Näytetään, että $A: H \rightarrow H$ on lineaarinen ja rajoitettu. Selvästi.

$$\begin{aligned}
 (A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), w)_H &= \\
 &= B[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w] \\
 &= \lambda_1 B[v_1, w] + \lambda_2 B[v_2, w] \\
 &= (\lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2, w)_H
 \end{aligned}$$

Kaikkien w , joten $A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 A v_1 + \lambda_2 A v_2$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
 \|A v\|_H^2 &= (A v, A v)_H \\
 &= B[v, A v] \\
 &\leq \|v\|_H \cdot \|A v\|_H,
 \end{aligned}$$

Joten

$$\|A v\| \leq \|v\|_H.$$

3) Seuraavaksi näytämme, että

$$\begin{cases} A \text{ on injektio} \\ \text{Ran}(A) = AH \text{ on suljettu } H\text{'ssä} \end{cases}$$

Havaitsemme, että

$$\beta \|v\|^2 \leq B[v, v] = (Av, v)_H \leq \|Av\| \cdot \|v\|.$$

Siihen

$$\|Av\| \geq \beta \|v\|, \quad v \in H.$$

Tästä seuraa, että A on injektio.

Jos nyt $y_j = Ax_j \in \text{Ran}(A),$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = y$$

on

$$\lim_{j, k \rightarrow \infty} \|x_j - x_k\|_H \leq \lim_{j, k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \|y_j - y_k\| = 0.$$

Siihen $(x_j)_{j=1}^\infty$ on Cauchy-jono, josta on $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j.$

Nyt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|Ax_j - Ax\|_H \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|A\| \cdot \|x_j - x\| = 0$$

Siihen $y = \lim_{j \rightarrow \infty} Ax_j = Ax \in \text{Ran}(A).$

4) Näytetään, että $\text{Ran}(A) = H$.

Jos $\text{Ran}(A) = \text{cl}(\text{Ran } A) \neq H$,
on olemassa $w \in \text{Ran}(A)^\perp$, $w \neq 0$

$$\left[\text{Ran}(A)^\perp = \overline{\text{Ran}(A)} \neq H \Rightarrow (\text{Ran } A)^\perp \neq \{0\} \right]$$

Tällöin olisi

$$\|w\|_H^2 \leq \frac{1}{\beta} B[w, w] = \frac{1}{\beta} (Aw, w)_H = 0$$

Joten $w = 0$. Tämä ristiriita osoittaa,
että $\text{Ran}(A) = H$.

Siten: $A: H \rightarrow H$ on jatkuva bijektio.

5) Käytämme Rieszin lauseketta uudelleen:
kosk. $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, on olemassa
 $b \in H$ jolle

$$F(w) = (b, w)_H \quad \text{kaikille } w.$$

Valitaan nyt $u = A^{-1}b$. Tällöin

$$Au = b \Leftrightarrow$$

$$\forall w \in H: (Au, w)_H = (b, w)_H \Leftrightarrow$$

$$\forall w \in H \quad B[u, w] = F(w).$$

6) Yksikäsitteisyys.

Oletetaan, että

$$B[u_1, w] = F(w), \quad \forall w \in H$$

$$B[u_2, w] = F(w), \quad \forall w \in H.$$

Tällöin $u = u_1 - u_2$ toteuttaa

$$B[u, w] = 0 \quad \forall w \in H,$$

eli riittää tarkastella tapauksia $F=0$.

Tällöin

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\beta} B[u, u] = 0,$$

joten $u=0$, eli $u_1=u_2$. Lopuksi todetaan
että jos $B[u, w] = F(w)$, $w \in H$, niin

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\beta} B[u, u] = \frac{1}{\beta} F(u) \leq \frac{1}{\beta} \|F\| \cdot \|u\|,$$

joten

$$\|u\| \leq \frac{1}{\beta} \|F\|.$$

□

vastavast todistetaan kompleksinen versio.

Lause 2.3 (Lax-Milgram)

Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus,

$$B: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$$

sesqui-linäärinen heliömuoto. $(B(\lambda v, \mu w) = \lambda \bar{\mu} B(v, w))$
Jolle on $\alpha, \beta > 0$ s.e.

$$|B(v, w)| \leq \alpha \|v\| \cdot \|w\|$$

$$B(v, v) \in \overline{\mathbb{R}_+}, \quad v \in H$$

$$B(v, v) \geq \beta \|v\|^2, \quad v \in H.$$

Silloin kaikilla funktiolla $F: H \rightarrow \mathbb{C}$ on
yh. s. $v \in H$ s.e.

$$B(v, w) = \overline{F(w)}, \quad w \in H.$$

tod. HT.

Olkoon seuraavassa

$$B[u, w] = \int_{\Omega} \left(\sum_{j, k=1}^n a^{jk} \partial_j u \cdot \overline{\partial_k w} + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j u \cdot \overline{w} + c u \cdot \overline{w} \right) dx,$$

jok. luv. $\lambda \in \mathbb{R}$, merkitsemm

$$B_{\lambda}[u, w] = B[u, w] + \lambda \int_{\Omega} u \cdot \overline{w} dx,$$

$$\varphi = \max \left(\max_{j, k} n^2 \cdot \|a^{jk}\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \max_j n \cdot \|b^j\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \|c\|_{L^{\infty}} \right),$$

Jos dhoon $\gamma > 0$ luv., jolle

$$\operatorname{Re} \sum_{j, k=1}^n a^{jk}(x) \varphi_j \overline{\varphi_k} \geq \gamma |\varphi|^2 \quad \text{kachill. } \varphi \in \mathbb{C}^n, \\ \text{m.k. } x \in \Omega.$$

Lemma 2.4 Onn olemassa on $\beta > 0$ j.s. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$
 s.e. kaikilla $u \in H_0^1(\Omega)$ j.s. $\lambda \geq \lambda_0$.

$$(19) \quad |B[u, w]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|w\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$(20) \quad |B_\lambda[u, u]| \geq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Huom: $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ j.s. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1}$.

Tod. (19) Seuraa α :n valinnasta. Lisäksi, kun $\lambda = 0$,

$$|B[u, u]| \geq \operatorname{Re} B[u, u]$$

$$\geq \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x) \partial_j u(x) \overline{\partial_k u(x)} + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j u \cdot \bar{u} + c u \cdot \bar{u} \right) dx$$

$$\geq \gamma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2} - \alpha \|u\|_{L^2}^2$$

$$= \alpha \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2} - \alpha \|u\|_{L^2}^2$$

Sii spä, koske

$$a \cdot b \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2,$$

Saanne valinnalle $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$

$$\operatorname{Re} B[v, v] \geq \frac{\gamma}{2} \|\nabla v\|^2 - \frac{1}{4 \cdot (\frac{\gamma}{2})} \cdot (\gamma \|v\|_{L^2})^2 - \gamma \|v\|_{L^2}^2$$

$$\geq \underbrace{\frac{\gamma}{2}}_{\beta} (\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2) - \underbrace{\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{\gamma} + \gamma \right)}_{=\lambda_0} \|v\|_{L^2}^2.$$

Sii, kun $\lambda \geq \lambda_0$,

$$|B_\lambda[v, v]| \geq \operatorname{Re} B_\lambda[v, v]$$

$$\geq \operatorname{Re} B_{\lambda_0}[v, v] \geq \beta \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

□

Lause 2.5 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu, $\partial\Omega \in C^1$, ja $a^{jk}(x) \in L^\infty(\Omega)$ elliptisyys ehdon (E) toteuttavia funktioita.

Olkoon $b^j(x), c(x) \in L^\infty(\Omega)$ ja $f \in L^2(\Omega)$.

Tällöin on olemassa $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ s.e. kun $\lambda \geq \lambda_0$, on

niin on olemassa yksikäsitteinen $u \in H_0^1(\Omega)$, joka on yhtälön

$$(21) \quad (L + \lambda)u = - \sum_{j,k=1}^n \partial_{x_j} \left(a^{jk}(x) \partial_{x_k} u \right) + \sum_{j=1}^n b^j(x) \partial_{x_j} u + (c(x) + \lambda)u = f(x) \quad \Omega:ssä,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

heikko ratkaisu, eli $u \in H_0^1(\Omega)$ ja

$$(22) \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j u \cdot \partial_k \phi + \sum_{j=1}^n b^j (\partial_j u) \phi + (c + \lambda) u \phi \right) dx = \int_{\Omega} f \phi dx$$

kaikilla $\phi \in H_0^1(\Omega)$

Huomautus: sama pteen kuin $f \in (H_0^1(\Omega))'$,
 j. (20):n oikeapoli tulkitase dualiteetiksi.

$$\int_{\Omega} f \phi \, dx := \langle f, \phi \rangle_{(H_0^1)' \times H_0^1} := f(\phi)$$

Tod koska $C: \phi \mapsto \bar{\phi}$ on antilineaarinen
 bijektio $C: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, j. $C: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$
 on (20) yhtäpitävä sen kanssa, että

$$B_{\lambda}[v, w] = \overline{g(w)}, \text{ kaikille } w \in H_0^1(\Omega),$$

missä $w = \bar{\phi}$, $g = \bar{F}$;

$$B_{\lambda}[v, w] = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j v \cdot \overline{\partial_k w} + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j v \cdot \bar{w} + (c+\lambda) v \bar{w} \right) dx$$

$$g(w) = \int_{\Omega} g w \, dx = \int_{\Omega} \bar{F} w \, dx.$$

Merkitsemme taas $B[v, w] = B_0[v, w]$, jolloin

$$B_{\lambda}[v, w] = B[v, w] + \int_{\Omega} \lambda v \cdot \bar{w} \, dx$$

κ_n λ_0 valitaan kuten Lemmä 2.4:ssä,

lause seuraa Lax-Milgramin lauseesta 2.3.

□