

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt 2 (ODY 2)

Matti Lassus

Johdanto

Esimerkki: ODY:stä on Laplace-yhtälö

$$\Delta u = 0 \quad \Omega \text{:ssä}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin},$$

eli

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

Tämä yhtälö mallittaa sähköjohtavuutta, diffusiota ja lämmenjohtavuutta.

Esim $u(x)$ = sähköinen potentiaali.

$$J(x) = -\sigma(x) \cdot \nabla u(x) = \text{virta}$$

↑
Johtavuus

$$\nabla \cdot J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u = 0$$

Esim 2 $\Delta u = 0$ on lineaarinen approksimaatio (HT) minimipintayhtälölle

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u \right) = 0$$

Tarkastellaan lähdetermiä sisältävää Poisson-yhtälää

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

klassisesti, $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$.

Kurssilla tarkastellaan vastaväilaisten yhtälöiden yleistetttyä, eli heikkoukseen ratkaisuita.

Motivaatio 1: Pistelähteet

Esim. $f(x)$ on pistelähdettä vastaava nitti,

$$f(A) = \begin{cases} 1 & \text{jos } 0 \in A \\ 0 & \text{jos } 0 \notin A \end{cases}, \quad A \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel-} \\ \text{joukko}$$

eli $f(x) = \delta_0(x)$.

Esim $f(x)$ vastaa "dipolia",

$$f(x) = \vec{A} \cdot \nabla \delta_0(x)$$

Motivaatio 2: Olemassaolo

Esim: Tarkastellaan yhtälää

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Ouko kahlille $f \in C(\bar{\Omega})$ olemassa ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$?

Vastaus: EI!

Olemassaolo on helpompaa tarkastella heikolle ratkaisulle
kuin klassisella, eli C^2 -ratkaisulle.

Motivativastio 3 : Tehniiet funktionaali-analyysistä

Olkoon:

$$C^m(\bar{\Omega}) = \left\{ f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid f = D^\alpha u \in C(\bar{\Omega}) \text{ over } \begin{array}{l} \text{laajennettavissa funktioiksi} \\ \bar{f}_\alpha \in C(\bar{\Omega}), |\alpha| \leq m \end{array} \right\}$$

$$D^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u(x),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|.$$

Avaruus $C^m(\bar{\Omega})$ on Banach-avaruus, joka on ei-refleksiivinen.
Tulemme tarkastelemaan Hilbert-avaruutta.

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\},$$

$\uparrow$ "korkeita derivaattoja"

$$L^2(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ mitall., } \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Esimerkiksi Δ on rajoitettu lineaarinen operaattori.

$$\Delta: H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

Tulemme kurssilla kohtaanasi (nielenhiinastis rippies)

A: Sobolev - avaruudet $H^m(\Omega)$ ja heikot
ODY: des. ratkaisut

B: ODY olemassaolotulosia heikkolla ratkaisulla

C: Sileyden parastuniset: Esin, jos
 $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,
 $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \dots \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

D: Operaattoriteoria ODY:lle
ja sovelluksia aalto- ja lämpöyhtälöille

$$\partial_t v(x, t) = \Delta_x v(x, t)$$

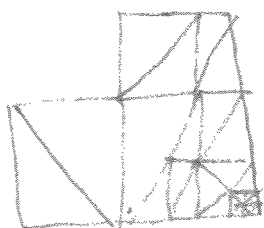
↓

$$v(x, t) = e^{t \Delta_x} v(x, 0)$$

E: Numeeriset menetelmät perusteella

$$u, f \in PL(T) \subset H^1(\Omega)$$

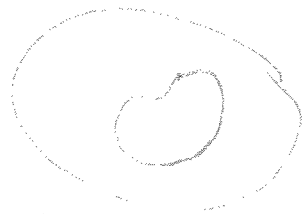
$$\Delta u \approx f$$



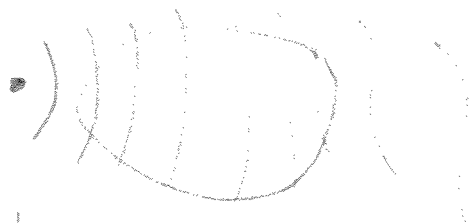
Kurssilla opittavat menetelmät sovelletaan
seuraaviin asioihin

- ODY epälineelle ja muuttaville
kerroinfunktioille

$$\nabla \cdot (1 + \chi_{\Omega_1}(x)) \nabla v(x) = 0$$



- Inversio-ongelmat: pistelähtökentät
ja kertomien määrittäminen



- Ratkaisuden hakenne simulointi
- LP-teoria ODY:lle
- Epälineaariset yhtälöt
 $\Delta u + f(u) = 0$
- Systemit (Maxwell, Dirac)
- FEM, FD-menetelmät
- Mikrolokali analyysi ODY:lle

I Funktioanalyysiä

1.1 Hölder-analyysi

Funktio $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, rajoitettu
on Lipschitz, jos

$$|u(x) - u(y)| \leq L |x - y|, \quad x, y \in \Omega.$$

Funktio $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on Hölder-jatkava ehjässä, jos
 δ , $0 < \delta \leq 1$ jos

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\delta.$$

Määr. 1.1 1) Jos $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja
rajoitettu, merkitsemme

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

2) Funktion $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ on $C^k(\bar{\Omega})$:ssä, jos
 $D^\alpha(u|_{\Omega})$ on kaikilla $|\alpha| \leq k$ lauseuttavissa
funktiona $f^\alpha \in C(\bar{\Omega})$ ja

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})}$$

3) Funktio $u \in C^k(\bar{\Omega})$ on avaruudessa $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ jos

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \dots$$

$$+ \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}} < \infty,$$

$$[u]_{C^{0,\gamma}} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

Lause 1.2 Avaruudet $C^k(\bar{\Omega})$ ja $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ ovat Banach-avaruuksia.

Tod. Siivottuna.

Seuraavaksi käsittelemme " L^2 -derivaattoja".

Tästä tulee "kertamuoto" Hilbert-avaruudet

$$L^2(\Omega) = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ mitullinen},$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty\}$$

approksimaatio, optimisointi.

Merkintä: $B(y, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < R\}$

$$\phi \in C_0^\infty(B(0, 1)), \quad \phi(x) \geq 0$$

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$$

$$v \in L^2(\Omega), \quad v_0^\circ = \begin{cases} v(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

Funktiota ϕ_ε kutsumme jatkossa silotettajiksi (mollifiers)

Lemma 1.2 Olkoon $v \in L^2(\Omega)$ ja

$$V_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x - y) v(y) dy$$

Tällöin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|V_\varepsilon - v\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

tod.

Koska $v_0^\circ(x) = 0$ kun $x \notin \Omega$, saamme $V_\varepsilon(x) = V_\varepsilon^\circ(x)$,
missä

$$V_\varepsilon^\circ(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x - y) v_0^\circ(y) dy = \phi_\varepsilon * v_0^\circ(x).$$

Olkoon $c_0 = (2\pi)^{n/2}$. Tällöin

$$\mathcal{F}(v_0^\circ * \phi_\varepsilon) = c_0 \hat{v}_0^\circ(s) \cdot \hat{\phi}_\varepsilon(s).$$

Erikoisesti

$$c_0 \hat{\phi}_\varepsilon(s) \Big|_{s=0} = \int_{\mathbb{R}^n} \overbrace{e^{-i \cdot 0 \cdot x}}^1 \phi(x) dx = 1$$

Fourier-mehrfache kartesische Summe

$$\begin{aligned} \|v^0 - v_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 &= \|\mathcal{F}(v^0 - v_\varepsilon^0)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \\ &= \|\widehat{v^0} - c_0 \widehat{\phi}_\varepsilon \cdot \widehat{v^0}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \end{aligned}$$

$$(1) \quad = \int_{\mathbb{R}^1} |1 - c_0 \widehat{\phi}_\varepsilon(s)|^2 \underbrace{|\widehat{v^0}(s)|^2}_{\in L^1(\mathbb{R}^1)} ds$$

N_{Y^+} $\widehat{\phi}_\varepsilon(s) = \widehat{\phi}(\varepsilon s)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$,
 daher $\widehat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ist

$$(2) \quad c_0 |\widehat{\phi}(s)| \leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = 1$$

$$c_0 \widehat{\phi}(0) = 1,$$

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |c_0 \widehat{\phi}(\varepsilon s) - 1| = 0, \quad s \in \mathbb{R}^1.$$

Lebesgues dominanter Konvergenzssatz gilt für
 (1), (2), (3): $\forall$ $\eta > 0$ $\exists$ $\delta > 0$

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^0 - v_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v - v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad \square$$

1.2 Heikot derivaatat

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja

$$C^\infty(\Omega) = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid D^\alpha v \text{ on olemassa } \forall \alpha\},$$

$$\text{Supp}(v) = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}},$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(v) \subset \Omega$$

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid v \in L^p(K) \text{ on kompakti.} \text{ kaikilla } K \subset \subset \Omega\}.$$

Muistutamme, että jos $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ja

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, pätee

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} v(x) \cdot \phi(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx$$

Määr. 1.3 Olkoon $v, w \in L_{loc}^1(\Omega)$. Sanomme, että w on v :n heikko ∂_{x_j} -derivaatta, jos merkitsemme $w = D_j v$, jos kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \partial_{x_j} \phi(x) dx.$$

Lisäksi, $\tilde{w}$ on heikko ∂_x^α -derivaatta v :stä, $D^\alpha v = \tilde{w}$ jos

$$\int_{\Omega} \tilde{w}(x) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \partial_x^\alpha \phi(x) dx$$

Lemme 1.4 * Jos $D_j u = w_1$, $D_j u = w_2$, $w_1, w_2 \in L^1(\Omega)$ niin $w_1 = w_2$.

tod Oletetaan $w = w_1 - w_2 \in L^1(\Omega)$. Kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} w \phi \, dx = \int_{\Omega} (w_1 - w_2) \phi \, dx = - \int_{\Omega} (u - u) \partial_{x_j} \phi \, dx = 0$$

kuin $\phi(x) = \psi_\varepsilon(z-x) = \psi\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$

$$w^\varepsilon(z) := \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(z-x) w(x) \, dx = \int_{\Omega} \phi w \, dx = 0.$$

Funktio w^ε on w :n mollifikaatio, jolloin pätee, että

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w - w^\varepsilon\|_{L^1(\tilde{\Omega})} = 0, \text{ kaikilla } \tilde{\Omega} \subset \bar{\Omega} \subset \subset \Omega$$

Siiispä $w = 0$.

□

Huom. Jos $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$, yllzö (4):stä voidaan käyttää Lemmää 1.2 B:stä.

*: Lauseen voi sivuttaa jos Reaalianalyysi-kurssi ei ole suoritetu.

⊛ Reaalianalyysi (I. Holopainen luentu), Lause 2.34.

⊛ Jos $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$, voidaan käyttää Lemmää 1.2 B.

Määr 1.5 Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$

Funktio $u \in L^p(\Omega)$ on Sobolev-avaruudessa

$$W^{k,p}(\Omega)$$

Jos kaikilla $|\alpha| \leq k$ on heikot derivaatat $D^\alpha u$ Bratdemassa, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, j

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Kun $p=2$, merkitsemme

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega),$$

jolloin

$$(1) \quad \|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

Listaus, $H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ on joulukin $C_0^\infty(\Omega)$ sulkeuma $H^k(\Omega)$:ssä.

Huomautus:

Norma (1):ssä on sisätulo

$$\langle u, w \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha w} \, dx$$

määriteltä

Lemma 1.6 (Permutationssubstanz)

1) $D^\alpha: H^k(\Omega) \rightarrow H^{k-|\alpha|}(\Omega), \quad k \geq |\alpha|, \text{ on } \text{Jatkuva}$

2) $D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u, \quad u \in H^{|\alpha|+|\beta|}(\Omega),$

$$\alpha + \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

tot. Ht.

Lemma 1.7 Avaruus $H^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ on Hilbert-avaruus.

tot. Oletaan $u_j, j=1,2,\dots$ Cauchy-jono $H^k(\Omega): \text{ssr}$,
Tällöin $\|u_j - u_l\|_{H^k} \rightarrow 0$ kun $|j-l| \rightarrow \infty$

$$\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_l\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_j - u_l\|_{H^k} \xrightarrow{j,l \rightarrow \infty} 0$$

Joten $D^\alpha u_j$ on Cauchy-jono $L^2(\Omega): \text{ssr}$.

Koska $L^2(\Omega)$ on täydellinen, on $f^\alpha \in L^2(\Omega)$

s.e. $D^\alpha u_j \rightarrow f^\alpha$ $L^2(\Omega): \text{ssr}$, kun $j \rightarrow \infty$

Erikorsett, $u_j \rightarrow f^0 =: u$ $L^2(\Omega): \text{ssr}$, kun $j \rightarrow \infty$

Seuraavaksi näytämme, että $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ $\|u\|_k$, $|\alpha| \leq k$, eli $u \in H^k(\Omega)$.

Yhtä funktioille $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee $D^\alpha u \in L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_j D^\alpha \phi \, dx$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u_j \cdot \phi \, dx$$

$$= \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} f^\alpha \cdot \phi \, dx$$

Joten u :lle on kehoitettu derivaatit

$$D^\alpha u = f^\alpha \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq k.$$

Siten $u \in H^k(\Omega)$. Kohti

$$\|u_j - u\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_j - f^\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

pätee

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u \quad H^k(\Omega): \text{ssa.} \quad \square$$

Seuraavaksi tarkastelemme $u \in H^k(\Omega)$:n
 approksimointia sillellä funktilla.

Lause 1.8 Olkoon $u \in H^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
 avoin, ϕ_ε , $\varepsilon > 0$ silottavia funktioita, j

$$u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(y) u(x-y) dy, \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

j $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \subset \Omega$, Ω' avoin joukko. Silloin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon = u \quad H^k(\Omega') : \text{ssa}.$$

Tod Kun $|q| \leq k$, todistamme, että

$$(5) \quad D^q u^\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) D^q u(y) dy \quad \Omega_\varepsilon : \text{ssa},$$

Kun $x \in \Omega_\varepsilon$, p ε tee

↑ heikko derivaatta

$$D_x^q u(x) = D_x^q \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) u(y) dy$$

$$(6) \quad \begin{aligned} &\stackrel{\uparrow}{=} \int_{\Omega} D_x^q \phi_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \int_{\Omega} (-1)^{|q|} D_y^q \phi_\varepsilon(x-y) \cdot u(y) dy \end{aligned}$$

Olkoon $x \in \Omega_\varepsilon$. Tällöin $\text{supp}(\phi_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$, pätee funktiolla $\eta(y) = \phi_\varepsilon(x-y)$ $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Siiispä helppo derivaatan määrittelyn nojalla,

$$\begin{aligned}
 D^\alpha u_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D_Y^\alpha \eta(y) \cdot u(y) dy \\
 (7) \quad &= \int_{\Omega} \eta(y) D_Y^\alpha u(y) dy = \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) D_Y^\alpha u(y) dy \\
 &= (D_X^\alpha u)_\varepsilon(x), \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega)
 \end{aligned}$$

Erikoisesti, kaava (5) pätee $\eta \in C_0^\infty(\Omega')$ kun $x \in \Omega'$.

Koska $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, pätee Lemma 1.2:n nojalla

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\varepsilon\|_{L^2(\overline{\Omega'})} = 0, \quad |\alpha| \leq k$$

Joten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha(u - u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega')} = 0, \quad u \in H^k(\Omega).$$

Siiispä

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u - u_\varepsilon\|_{H^k(\Omega')} = 0. \quad \square$$

Kun $x \in \Omega$, pätee $\eta(x, y) = \phi_\varepsilon(x - y)$.

$$\eta \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} C^j(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$$

$$\eta(x, y) = \phi_\varepsilon(x - y).$$

Tällöin (H+)

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} (\partial_x^\alpha \phi_\varepsilon)(x - y) u(y) dy, \quad x \in \Omega$$

ja

$$u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} C^j(\bar{\Omega}).$$

Kysymys: Miksi aiemmassa lauseessa ei valittu $\Omega' = \Omega$?

Vastaus: Kaava (7) ei ole voimassa yleisesti.

Lause 1.9 (Sobolev-funktioiden globaal.
approximaatio)

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu,
 $v \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Silloin on olemassa
 $v_j \in H^k(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ jälle

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v_j - v\|_{H^k(\Omega)} = 0,$$

eli. $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = v$ $H^k(\Omega)$:ssä.

Tod. Valitaan avoimet joukot

$$\Omega_j = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Tällöin $\Omega_j \subset \Omega$, $\overline{\Omega_j}$ on kompakti,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega.$$

Olkoon $V_j \subset \Omega$, $j=1,2,\dots$ Ω :n
avoimien osien,

$$V_j = \Omega_{j+3} \setminus \overline{\Omega_{j+1}}, \quad j \geq 2$$

$$V_j = \Omega_4.$$

Tällöin on olemassa V_j -te vastaus sille
yhtälöön $\Delta u = f$, eli $\eta_j(x)$ joille

$$(8) \begin{cases} 0 \leq \eta_j(x) \leq 1, & \eta_j \in C_0^\infty(V_j) \\ \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x) = 1 & \text{kaikilla } x \in \Omega \end{cases}$$

(Olemassaolo H^k)

Tällöin kaikilla $|k| \leq k$

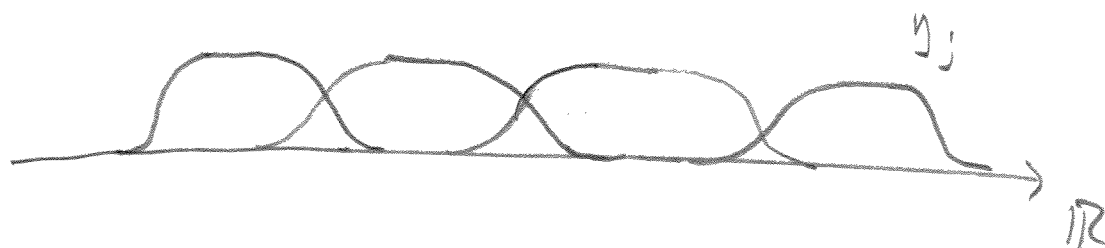
$$D^k(\eta_j u) = \sum_{\beta \leq k} \binom{k}{\beta} \underbrace{D^\beta \eta_j}_{\in C_0^\infty} \cdot \underbrace{D^{k-\beta} u}_{\in L^2} \in L^2(\Omega),$$

Joten $\eta_j u \in H^k(\Omega)$, $\text{supp}(\eta_j u) \subset \overline{V_j}$.

Yllä

$$\beta \leq k \Leftrightarrow \forall j \quad \beta_j \leq k_j,$$

$$\binom{k}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{k_j}{\beta_j}$$



Valitaan $\delta > 0$.

Tämän jälkeen valitsemme kaikille $j \in \mathbb{Z}_+$ niin
pienen $\varepsilon_j > 0$, että funktio

$$w_j(x) = \int_{\Omega} \phi_{\varepsilon_j}(x-z) (\eta_j v)(z) dz$$

Pätee

$$\|w_j - \eta_j v\|_{H^k(\Omega)} < \frac{\delta}{2^j},$$

$$(8) \quad \text{supp}(w_j) \subset V_j + B(0, \varepsilon_j) \subset \Omega_{j+4} \setminus \overline{\Omega_j}$$

Olkoon $l \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j v = \sum_{j=1}^l \eta_j v_j \quad \Omega_l \text{ :ssä,}$$

sillä $\eta_j v = 0$ Ω_l :ssä, kun $j > l$.

Määritellään nyt

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x), \quad x \in \Omega.$$

$$(8)\text{:n nojalla} \quad w(x) = \sum_{j=1}^l w_j(x), \quad x \in \Omega_l.$$

Koska $w_j \in C^\infty(\Omega)$, näemme, että $w|_{\Omega_l} \in C^\infty(\Omega_l)$,
jolloin $w \in C^\infty(\Omega)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \|w - v\|_{H^k(\Omega_l)} &\leq \sum_{j=1}^l \|w_j - \eta_j v\|_{H^k(\Omega_l)} \\ &\leq \sum_{j=1}^l \|w_j - \eta_j v\|_{H^k(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^l \frac{\delta}{2^j} \leq \delta. \end{aligned}$$

Lebesguen monotonisen konvergensilauseen nojalla,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |D^k w - D^k v|^2 dx \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_l} |D^k w(x) - D^k v(x)|^2 dx \leq \delta^2$$

Josta seuraa $D^\alpha w \in L^2(\Omega)$, ts. $w \in H^k(\Omega)$, jn

$$\|w - v\|_{H^k(\Omega)} \leq \delta$$

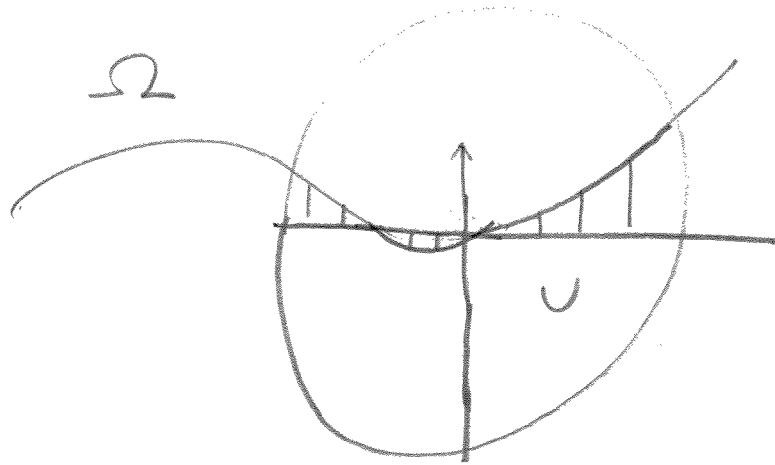
Koska $\delta > 0$ on mielivaltaisen pieni, seuraa $D^\alpha w = D^\alpha v$.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^h$ avoin. Sanoimme,
 että $\partial\Omega$ on C^k -sileä, jos
 kaikilla $x^0 \in \partial\Omega$ on ympäristö $V \in B(x_0, \rho)$, $\rho > 0$,
 $\mathbb{R}^{h-1}$ ortonormaalin kannan $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_{h-1}$ määrännyt x_0 -keuhien
 koordinaatit.

$$Y_j: X \mapsto Y_j = \vec{V}_j \cdot (X - x^0), \quad Y(x) = (Y_j(x))_{j=1}^h$$

(10) Ja $C^k(\mathbb{R}^{h-1})$ -funktio $\gamma: \mathbb{R}^{h-1} \rightarrow \mathbb{R}$ joille

$$\Omega \cap U = \{x \in U : Y_h(x) > \gamma(Y_1(x), \dots, Y_{h-1}(x))\}$$

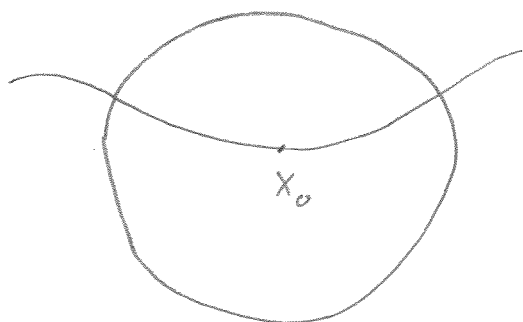


Merkitsemme $X = (X', X_h)$, $Y = (Y', Y_h) \in \mathbb{R}^{h-1} \times \mathbb{R}$.
 Jos Ω :n reuna on C^1 -sileä,
 silloin on normaali-vektori X_0 siten,

$$v(x^0) = \sum_{j=1}^{h-1} (\partial_{Y_j} \gamma)(0) \cdot \vec{V}_j = \vec{V}_h.$$

Reunan suoristus

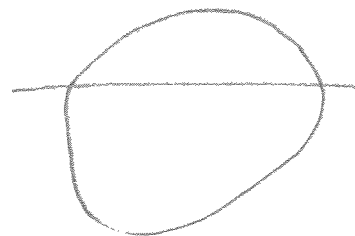
$$U = B(x_0, \rho)$$



y -coordinates



$\tilde{U}$



$\tilde{y}$ -coordinates

Määritellään kuvaus

$$\Phi(y) = (\Phi^1(y), \dots, \Phi^n(y))$$

$$\Phi^j(y_1, \dots, y_n) = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Phi^n(y_1, \dots, y_n) = y_n - \gamma(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

ja

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = \Phi(y)$$

Tällöin $\Phi: U \rightarrow \Phi(U) = \tilde{U}$ on C^k -kuvaus

Määritellään $\Psi: \tilde{U} \rightarrow U, \quad \Psi = \Phi^{-1}$

$$\Psi^j(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = \tilde{y}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Psi^n(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) = \tilde{y}_n + \gamma(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1})$$

Myös Ψ on C^k -kuvaus. Havaitsemme, että

$$\det D\Psi = \det D\Phi = 1,$$

$$\text{ja } \Phi(U \cap \Omega) = \tilde{U} \cap \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}_n > 0\}.$$

Lause 1.10 (Sobolev funktioiden approksimaation
reunalla ast.)

Olkoon Ω rajoitettu ja avoin, $\partial\Omega$ C^1 -sileä,
 $u \in H^k(\Omega)$. Silloin on olemassa

$u_j \in H^k(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$, jolle

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u \quad H^k(\Omega) \text{:ssä.}$$

Tod. Olkoon $x_0 \in \partial\Omega$, $Y(x)$, $\vec{V}_j$, $U = B(x_0, \rho)$, $0 < \rho < 1$
ja $\gamma(Y')$ kuten (10):ssä, $Y = (Y', Y_n)$.

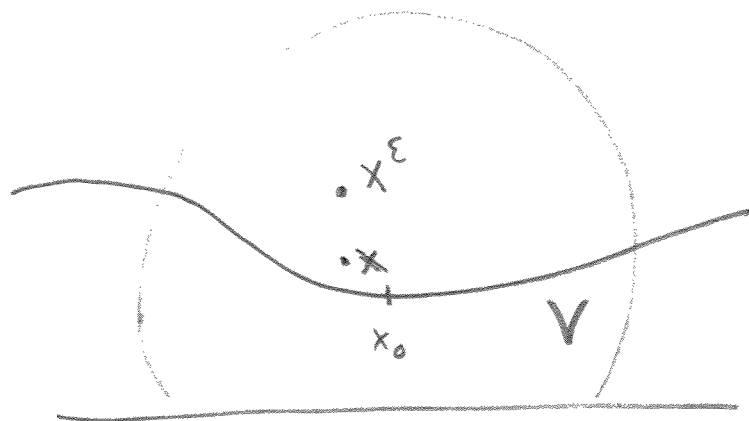
Olkoon $\tilde{U} = B(x_0, \rho/2)$ ja $V = \tilde{U} \cap \Omega$.

Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi $\vec{V}_j = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$, $Y_j = x_j$.
Määritellään pisteen siirto.

$$T^\varepsilon x := x^\varepsilon = x + \lambda \varepsilon e_n, \quad x \in V, \quad \varepsilon > 0$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

missä

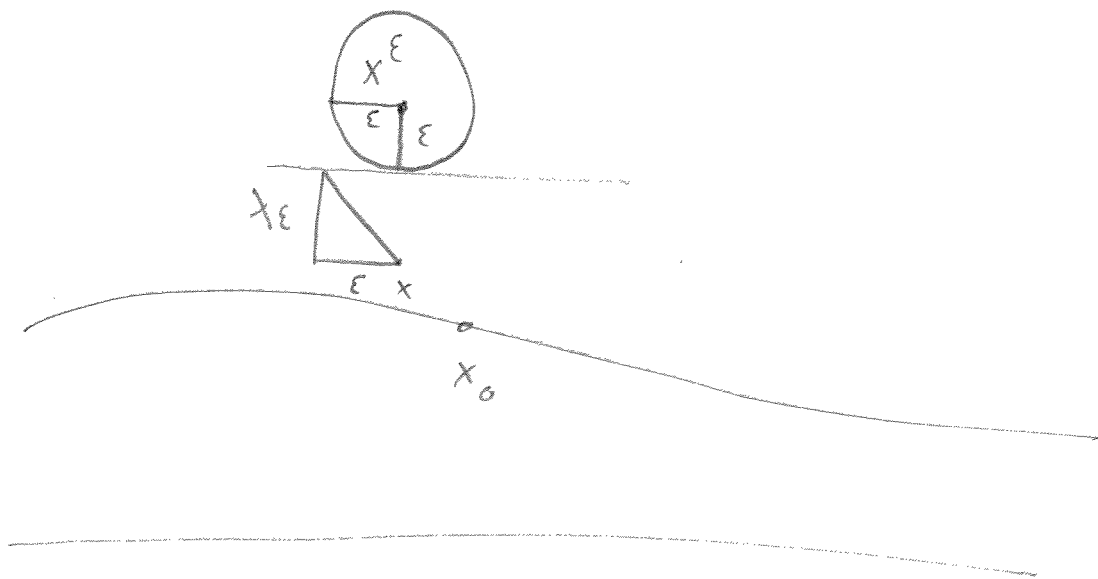


$\lambda > 0$ on niin suuri, että on olemassa $\varepsilon_0 > 0$

$$x \in \Omega \cap B(x_0, \frac{p}{2}) \Rightarrow B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subset B(x_0, p) \cap \Omega$$

kun $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Esimerkiksi;

$$\lambda > \max_{|y'| \leq \frac{p^2}{3}} \|\nabla_{y'} \gamma(y')\| + 1$$



Merkitään selvästi, määritellään

$$f^q(x) = \begin{cases} D^q u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}, |q| \leq k$$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

jä

$$u^\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon) = (u \circ T^\varepsilon)(x), \quad x \in V$$

$$w^\varepsilon(x) = \int_V \phi_\varepsilon(x-z) u^\varepsilon(z) dz, \quad x \in V.$$

Tällöin, kun $x \in V$, muuttujanvaihdolla $y = T^\varepsilon z$,
 jolloin $x - z = x - T^\varepsilon y = T^\varepsilon x - y$,

$$w^\varepsilon(x) = \int_U \phi_\varepsilon(x^\varepsilon - y) u(y) dy, \quad x \in V$$

Nyt $\eta(y) = \phi_\varepsilon(x^\varepsilon - y)$, $x \in V$ toteuttaa

$$\eta \in C_0^\infty(U),$$

joten $w^\varepsilon \in C^\infty(V)$, jä

Joten kun $|x| \leq h$, $x \in V$

$$\begin{aligned}
 D^\alpha w^\varepsilon(x) &= \int_V \partial_x^\alpha (\phi^\varepsilon(x^\varepsilon - y)) \cdot D^\alpha v(y) dy = \\
 &= \int_V (-1)^{|\alpha|} \partial_y^\alpha [\phi(x^\varepsilon - y)] v(y) dy = \int_V \phi_\varepsilon(x^\varepsilon - y) D^\alpha v(y) dy \\
 &= \int_V \phi_\varepsilon(x^\varepsilon - y) f^\alpha(y) dy \\
 &= \phi_\varepsilon * (f^\alpha \circ T^\varepsilon). \quad \forall x \in V
 \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon^\alpha &= \|D^\alpha v - D^\alpha w^\varepsilon\|_{L^2(V)} \leq \|f^\alpha - \phi_\varepsilon * (f^\alpha \circ T^\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\
 &\leq \|f^\alpha - \phi_\varepsilon * f^\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} + \|\phi_\varepsilon * (f^\alpha - (f^\alpha \circ T^\varepsilon))\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\
 &= J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2.
 \end{aligned}$$

Lemmas 1.2 B:n nojalla $J_\varepsilon^1 \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lisäksi, $v \in L^2(\mathbb{R}^1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \|\phi_\varepsilon * v\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} &= c \|\hat{\phi}_\varepsilon \cdot \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leq \underbrace{\sup_s |c \cdot \hat{\phi}_\varepsilon|}_=1 \cdot \|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \\
 &\leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}
 \end{aligned}$$

missä $C = (2\pi)^4$

Suppose, however $m_\epsilon(s) = e^{i\lambda \epsilon e_n \cdot s}$,

$$\begin{aligned}
 (J_\epsilon^2)^2 &\leq \|f^\sharp - f^\sharp \circ T^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \\
 &= \|\hat{f}^\sharp - m_\epsilon \cdot \hat{f}^\sharp\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^1} \underbrace{|1 - m_\epsilon(s)|^2}_{\leq 4} \underbrace{|\hat{f}^\sharp(s)|^2}_{\in L^1(\mathbb{R}^1)} ds \\
 &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

Lebesgue dominated convergence theorem applies.

Suppose however $u \in H^k(\Omega)$, then

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u - w^\epsilon\|_{H^k(V)} = 0,$$

where $w^\epsilon = \phi_\epsilon * (u \circ T^\epsilon) \in C^\infty(V)$.

Notice, for $\text{supp}(u) \subset B(x^0, \frac{P}{4}) \cap \overline{\Omega}$ for ϵ large enough Pienri, $\text{supp}(w^\epsilon) \subset B(x^0, \frac{P}{2}) \cap \overline{\Omega}$,

Jolloin $w^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $v \in H^1(\Omega)$.

Valitaan kaikille $x \in \partial\Omega$ ympäristö $V(x) = B(x, \frac{P(x)}{2})$

Jolle (10) on voimassa. Koska $\partial\Omega$ on

kompakti, voidaan valita pisteet $x_1, x_2, \dots, x_N \in \partial\Omega$,

jolloin pätee

$$V_j = V(x_j, \frac{P(x_j)}{2})$$

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N V_j = W$$

Olhoon $V_0 \subset \Omega$ avoin, $\bar{V}_0 \subset \Omega$ s.e.

$$\bigcup_{j=0}^N V_j \supset \Omega,$$

Ja olhoon $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_N \in C^\infty(\bar{\Omega})$, funktioita,

$$\text{supp}(\eta_j) \subset V_j,$$

$$\sum_{j=1}^N \eta_j(x) = 1 \quad \text{kaikille } x \in \bar{\Omega}.$$

Olhoon $\delta > 0$. Valitaan niin pientä $\varepsilon_j > 0$,
 $j = 0, 1, \dots, N$ että seuraavat ehdot ovat
 voimassa: (H₁)

$$V_0(x) = \phi_{\varepsilon_0} * (\eta_0 \cdot \tilde{u})(x), \quad x \in \Omega$$

$$\text{supp}(V_0) \subset V_0, \quad \|V_0 - \eta_0 \cdot \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < \frac{\delta}{N+1}$$

$$V_j(x) = \phi_{\varepsilon_j} * ((\eta_j \cdot \tilde{u}) \circ T^{\varepsilon_j})(x), \quad x \in \Omega$$

$$\text{supp}(V_j) \subset V_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\|V_j - \eta_j \cdot \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < \frac{\delta}{N+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Tällöin

$$V = \sum_{j=0}^N V_j \in C^\alpha(\bar{\Omega})$$

$$\|V - \tilde{u}\|_{H^k(\Omega)} < (N+1) \cdot \frac{\delta}{N+1} = \delta.$$

□

Seuraavaksi Sobolev funktioiden lauseen lause:

Lause 1.11 Olkoon $\Omega \subset B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ avoin,
 $\partial\Omega \in C^k$ silloin, $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin on olemassa kuvaus

$$E: H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n)$$

jota varten $C_0 > 0$, s.e. kun $v \in H^k(\Omega)$,

$$(i) \quad Ev = v \quad \text{m.k. } \Omega:ssa$$

$$(ii) \quad \text{supp}(Ev) \subset B(0, R+1)$$

$$(iii) \quad \|Ev\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \|v\|_{H^k(\Omega)},$$

Tod. Olkoon $x_0 \in \partial\Omega$. Oletetaan lisäksi,
 että on $p > 0$ s.e.

$$\Omega \cap B(x_0, p) = \overbrace{(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)}^{=: \mathbb{R}_+^n} \cap B(x_0, p) \\ =: B_+$$

Jä

$$v \in C^\infty(\overline{B_+})$$

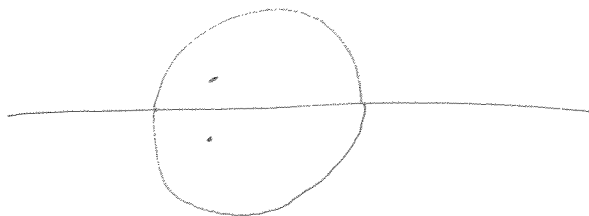
Merkittäen

$$B_- = (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_-) \cap B(x_0, p)$$

$$B = B(x_0, p).$$

kun $k=1$, määritellään

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \bar{B}_+ \\ -3v(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4v(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}), & x \in B_- \end{cases}$$



Tällöin toispuolisille derivatoille

$$\partial_{x_n} v \Big|_{x_n=0\pm} = \lim_{h \rightarrow 0\pm} \frac{1}{h} (v(x', h) - v(x', 0))$$

pitää (HT)

$$\partial_{x_n} v \Big|_{x_n=0+} = \partial_{x_n} v \Big|_{x_n=0-},$$

Joten osittaisderivatat $\partial_{x_n} v$ on klassisessa mielessä olemassa. Havaitsemme, että kaikki osittaisderivatat $\partial_{x_j} v(x)$ ovat olemassa pisteittäin, ja jatkuvasti funktioita $\bar{B}_+$:ssä ja $\bar{B}_-$:ssä. Tästä seuraa, että $v \in C^1(\bar{B})$ (ja että v on differentioituva kaikissa pisteissä $x \in B$), siis $\bar{v} \in H^1(B)$

Haraitsumma, että

$$D_j \bar{u}(x) = -3 \partial_{x_j} u(x', -x_n) + 4 \partial_{x_j} u(x', -x_n/2), \quad x \in B_-$$

$$D_j \bar{u}(x) = +3 \partial_{x_n} u(x', -x_n) - 2 \partial_{x_n} u(x', -x_n/2), \quad x \in B_-$$

Joten

$$\|D\bar{u}\|_{L^2(B_-)} \leq 7 \|Du\|_{L^2(B_+)}.$$

Siksi

$$\|\bar{u}\|_{H^1(B)} \leq 8 \|u\|_{H^1(B_+)}.$$

Tapaus $k > 1$ käytännössä jatkos

$$(A) \quad \bar{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{B^+}, \\ \sum_{j=0}^k a_j u(x', -\frac{x_n}{j+1}), & x \in B_- \end{cases}$$

Jossa a_j valitaan siten, että

$$\sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{j+1}\right)^l a_j = 1, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Tämä yhtälöryhmä on aina ratkaistavissa (t.f. Vandermonde matriisi), j.e.

pitäen, että kun $u \in C^\infty(\bar{B}_+)$,

$$\bar{u} \in E^k(\bar{B}),$$

$$\|\bar{u}\|_{H^k(B)} \leq C_k \|u\|_{H^k(B_+)}$$

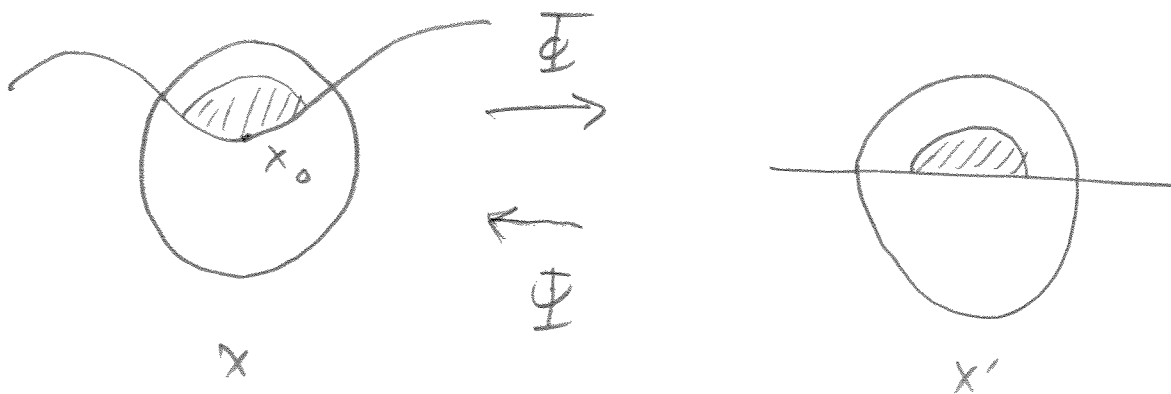
Tarkastellaan seuraavaksi tapaus, jossa $\partial\Omega$ ei ole litteä, mutta pisteellä $x_0 \in \partial\Omega$ on ympäristö $V \subset \mathbb{R}^n$ s.e. on C^k -sileät kuvaukset

$$\Phi: V \rightarrow \tilde{V} = B(0, \rho) = B$$

$$\Psi: \tilde{V} \rightarrow V$$

jolloin $\Phi^{-1} = \Psi$, $\Phi: V \cap \Omega \rightarrow B_+ = B \cap \mathbb{R}_+^n$.

Kun $W = \text{supp}(u) \subset \bar{\Omega} \cap V$, $u \in C^\infty(\bar{V})$



Käytämme ketjusääntöä

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_j'} (u \circ \Psi(x')) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^k}(\Psi(x')) \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_j'}(x).$$

Jä s.e. tietoa että kun $W \subset \subset V$, $W' \subset \subset V'$, on $C, C' > 0$

$$|\partial_{x'}^\alpha \Psi(x)| \leq C', \quad |\alpha| \leq k, \quad x' \in W' \cap \overline{B_+}$$

$$|\partial_x^\alpha \Phi(x)| \leq C, \quad |\alpha| \leq k, \quad x \in W \cap \overline{\Omega}$$

Tästä näemme, että kaikk. $W \subset \subset V$, on $C_1, C_2 > 0$ s.e.

$$(10) \quad C_1 \|u\|_{H^k(\Omega)} \leq \|u'\|_{H^k(B_+')} \leq C_2 \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

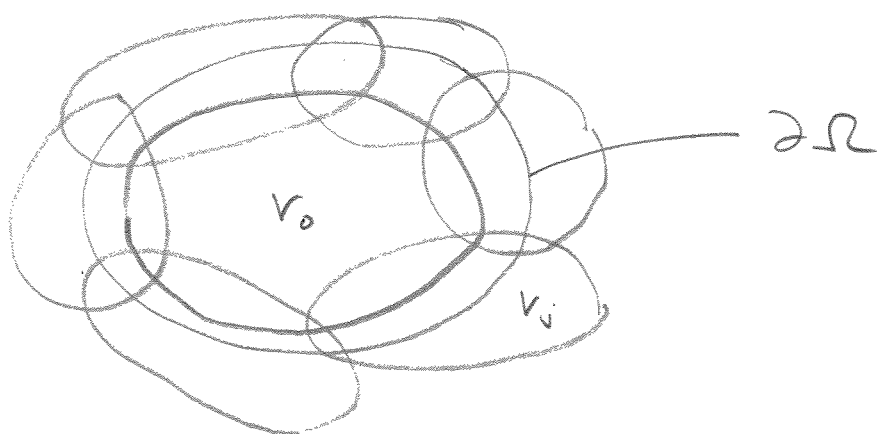
$$\text{Kun } u \in H^k(\Omega),$$

$$\text{supp}(u) \subset W \cap \overline{\Omega}$$

$$u' = u \circ \Psi$$

Olkoon nyt Ω C^k -reunainen alue,
 ja $V_j \subset \mathbb{R}^n$ reuna avoin pte, $j=1, \dots, N$,
 s.e. reuna voidaan suoristaa C^k -kuvaruokalla
 Φ_j, Ψ_j kussakin V_j :ssä, ja $V_0 \subset \Omega$
 avoin joukko s.e. $\overline{V_0} \subset \subset \Omega$,

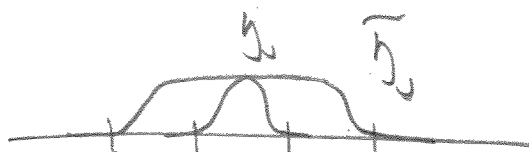
$$\bigcup_{j=0}^N V_j = \Omega, \quad \text{diam}(V_j) < 1, \quad j=1, \dots, N$$



Valitaan $\eta_j \in C_0^\infty(V_j)$ s.e.

$$\sum_{j=0}^N \eta_j(x) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Olkoon $\tilde{\eta}_j \in C_0^\infty(V_j)$, $\tilde{\eta}_j|_{\text{supp}(V_j)} = 1$



N_{γ} voidaan määrittellä kuvauksella

$$E: v \mapsto \sum_{j=1}^N \tilde{\eta}_j \cdot \left(\left(E_0((\eta_j v) \circ \psi_j) \right) \circ \Phi_j \right) + \eta_0 v,$$

missä $E_0: C^\infty(\overline{B}_+) \rightarrow C_0^\infty(\overline{B})$

on kuvaus $E_0 v = \bar{v}$, kts. (A), p. 32.

$$E: C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^k(\mathbb{R}^n),$$

$$\|E v\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \|v\|_{H^k(\Omega)}$$

Jollakin $C > 0$ koska $C^\infty(\overline{\Omega})$ on

$H^k(\Omega)$:n tiheä osajoukko, E laajenee yksikäsitteisellä tavalla jatkuvaksi kuvaukseksi

$$E: H^k(\Omega) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n).$$

Koska $E v|_\Omega = v$ pätee $C^\infty(\overline{\Omega})$:ssä se pätee kaikilla $v \in H^k(\Omega)$

Sanoik, kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
 $\text{supp}(\phi) \cap B(0, R+1) = \emptyset$

pätee

$$\langle Eu, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Tämä pätee kaikilla $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, ja jatkumisen
 nojalla kaikilla $u \in H^k(\Omega)$. Tästä seuraa, että

$$\text{supp}(Eu) \subset \overline{B(0, R+1)}, \quad u \in H^k(\Omega)$$

□

Appendix A: Fourier-muunnos

Motivoitii: Fourier sarjojen teoriaa nojalle

$$f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{C} \quad f \in L^2([-L, L])$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i \frac{\pi}{N} n \cdot x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n(x)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{\pi}{L} n \cdot y} dy = \frac{1}{\|e_n\|_{L^2}^2} \langle f, e_n \rangle_{L^2}$$

Merkitsemällä $c_n = \hat{f}\left(\frac{\pi}{L} n\right)$, $z_n = \frac{\pi}{L} n$, $h = \frac{\pi}{L}$, saamme

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(z_n) e^{i z_n x} \cdot h$$

$$\hat{f}(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(y) e^{-i z_n y} dy$$

Määrä. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Funktio

Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \xi \cdot x} f(x) dx$$

Olkoon $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$, $j \in$

$$S(\mathbb{R}^1) = \left\{ f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \text{ kahill. } q, m \text{ on } C_{m,q} > 0 \text{ s.e. } |\langle x \rangle^m D^q f(x)| \leq C_{m,q}, x \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

Lause: Jos $f \in S(\mathbb{R}^1)$, niin $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^1)$.

Lisäksi, $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$.
Tod. Oheismateriaali + HT.

Lause Olkoon $f, h \in S(\mathbb{R}^1)$. Tällöin

a) Jos $g(x) = f(x-a)$, niin $\hat{g}(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$

b) Jos $g(x) = \partial_{x_j} f(x)$, niin $\hat{g}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$

c) Jos $g(x) = x_j f(x)$, niin $\hat{g}(\xi) = -i \partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi)$

d) Jos $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, niin $\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$, $\lambda > 0$

e) Jos $g = (f * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-z)h(z)dz$, niin $\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{h}(\xi)$.
Tod HT

Lause (Plancherel). Jos $f \in S(\mathbb{R}^1)$, niin

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}$$

Tod. Täustamateriaali + HT

Korollari: $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ voidaan laajentaa yksikäsitteisellä tavalla jatkuvaksi lineaarikuvaukseksi

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

Lisäksi, $\mathcal{F}^2 f(x) = \mathcal{F}f(x) := f(-x)$, eli

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$$

Esim. Gaussisen funktion Fourier-muunnos on gaussinen funktio;

$$g(x) = e^{-|x|^2/2}$$

$$\hat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} = g(\xi)$$