Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 9
Ma 7.12.2009, kello 10-12, B322

1. Olkoon $L = -c^2\Delta$, $c > 0$ vakio, Ω rajoitettu C^∞-alue,

$$(L - \lambda_j)\phi_j = 0, \quad \phi_j \in H_0^1(\Omega),$$

ja $(\phi_j, \phi_k)_{L^2} = \delta_{jk}$. Kun $f \in L^2(\Omega)$, merkitään $f_j = (f, \phi_j)_{L^2}$. Oletetaan $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ ja

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u(x,t) = 0, & \Omega \times \mathbb{R}_+\text{:ssa} \\ u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = h \\ u|_{t=0} = f^1, \quad \partial_t u|_{t=0} = f^2 \end{cases}$$

Oletetaan lisäksi, että $h = 0$. Kirjoita $u(x,t)$ muodossa

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^\infty u_j(t)\phi_j(x),$$

missä funktiot u_j riippuvat kertoimista f_j^1 ja f_j^2.

2. Oletetaan edellisen tehtävän tilanteessa, että $f^1 = 0 = f^2$, mutta $h \neq 0$. Kirjoita $u(x,t)$ muodossa

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^\infty u_j(t)\phi_j(x),$$

missä funktiot u_j riippuvat funktiosta h.

3. Määritellään

$$D_j^h u(x) := \frac{u(x + he_j) - u(x)}{h},$$

missä $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Oletetaan, että $u \in L^2(\Omega)$, Ω rajoitettu C^∞-alue. Osoita, että

$$\int_\Omega u(D_j^h \phi)dx = -\int_\Omega (D_j^{-h} u)\phi dx,$$

missä $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ ja $|h|$ pieni.

4. Osoita edellisen tehtävän tilanteessa, että

$$D_j^h(u\phi) = u^h D_j^h \phi + \phi D_j^h u,$$

missä $u^h(x) = u(x + he_j)$ ja $|h|$ pieni.

5. Oletetaan $u_+ \in H^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, $u_- \in H^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-)$ ja $\Delta u_\pm = 0$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_\pm$:ssa. Merkitään $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$, ja oletetaan $u_+|_\Gamma = u_-|_\Gamma$ ja $\partial_{x_2} u_+|_\Gamma = \partial_{x_2} u_-|_\Gamma$. Merkitään

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} u_+(x_1, x_2), & x_2 > 0 \\ u_-(x_1, x_2), & x_2 < 0. \end{cases}$$

Osoita, että $\Delta u = 0$ $\mathbb{R}^2$:ssa.