Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 8
Ma 30.11.2009, kello 10-12, B322

1. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $K : H \to H$ kompakti ja itseadjungoitu ts. $K = K^*$. Oletetaan tunnetuksi, että K:n ominaisarvot ovat reaalisia, ja että eri ominaisrvoihin liittyvät ominaisfunktiot ovat kohtisuorassa.

   Osoita, että ei ole olemassa jonoa ominaisarvoja $\lambda_j \neq 0$ s.e. $\lambda_j \neq \lambda_k$ kun $j \neq k$ ja $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \mu \neq 0$.

2. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $A : H \to H$ itseadjungoitu. Oletetaan, että $Y \subset H$ on aliavaruus s.e. $A : Y \to Y$. Osoita, että $A : Y^\perp \to Y^\perp$.

3. Olkoon Ω rajoitettu C^1-alue ja $L : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ elliptinen ja symmetrinen 2. kertaluvun osittaisdifferentiaalioperaattori. Merkitään λ_j ovat L:n ominaisarvot. Osoita, että

$$\liminf_{j\to\infty} \lambda_j \neq -\infty.$$

4. Oletetaan edellisen tehtävän tilanteessa, että $(L-\omega)u = f$, $(L-\lambda)\phi = 0$ ja $\omega \neq \lambda$. Osoita, että

$$(u,\phi)_{L^2} = \frac{1}{\omega - \lambda}(f,\phi)_{L^2}.$$