Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 7
Ma 23.11.2009, kello 10-12, B322

1. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $A : H \to H$, $B : H \to H$ rajoitettuja lineaarioperaattoreita.

   a) Jos A ja $A + B$ ovat kääntyviä, niin osoita Kreinin kaava

   $$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}.$$

   b) Jos A on kääntyvä ja $\|B\| < \|A^{-1}\|$, niin osoita että $A + B$ on kääntyvä.

2. Olkoon $p \in [1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$. Määritellään

   $$l^p_s := \{a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \|a\|^p_{l^p_s} := \sum_{j=1}^{\infty} (\langle j \rangle^s |a_j|)^p < \infty\},$$

   missä $\langle j \rangle = \sqrt{1 + j^2}$.

   Osoita, että identtinen kuvaus

   $$I : l^p_s \to l^q_t$$

   on jatkuva, kun $t - s < 1/p - 1/q$.

   Vihje: Ks.
   `http://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6lder%27s_inequality`

   Huomautus: Wikipedian vaaroista lähteenä, ks.
   `http://fi.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9n_otaksuma`

3. Osoita, että edellisen tehtävän I on kompakti.

4. Olkoon $a^{jk}, b^j \in C^1(\overline{\Omega})$ ja Ω rajoitettu C^1 alue. Osoita, että

   $$\int_\Omega (Lu)\overline{w}dx = \int_\Omega u\overline{L^* w}dx, \quad u, w \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$