Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 5
Ma 9.11.2009, kello 10-12, B322

Olkoon L elliptinen operaattori

$$L\phi = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a^{jk} \partial_k \phi + \sum_{j=1}^{n} b^j \partial_j \phi + c\phi,$$

missä $a^{jk}, b^j, c \in L^\infty(\Omega)$. Tarkastelemme seuraavassa eri määritelmien järkevyyttä.

Määritelmä 1 *Funktio $u \in H_0^1(\Omega)$ on reuna-arvo ongelman*

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

heikko ratkaisu, jos kaikilla $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk} (\partial_k u)(\partial_j \phi) + \sum_{j=1}^{n} b^j (\partial_j u)\phi + cu\phi \right) dx = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}.$$

Määritelmä 2 *Jos $u \in L^2(\Omega)$, niin sanomme, että $w \in L^2(\Omega)$ on u:n heikko derivaatta, ja merkitsemme $D_j u = w$, jos kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee*

$$\int_\Omega u D_j \phi dx = -\int_\Omega w \phi dx.$$

Määritelmä 3 *Jos $u \in L^2(\Omega)$, niin $T = D_j u \in H^{-1}(\Omega)$ on kuvaus*

$$T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$\langle T, \phi \rangle = -\int_\Omega u D_j \phi dx.$$

1. Todista Lemma 2.7 todistuksen tapaan, että jos $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ on kuvaus

$$\langle T, u \rangle = \int_\Omega f_0 u dx - \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega f_j D_j u dx, \tag{2}$$

missä $f_j \in L^2(\Omega)$, niin T on jatkuva, ja

$$\|T\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\{\sum_{j=0}^{n} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \,|\, T \text{ toteuttaa (2):n funktioilla } f_j \in L^2(\Omega)\}$$

2. Osoita, että jos $u \in H^1(\Omega)$ (huom: ei välttämättä $u \in H^1_0(\Omega)$), niin määritelmien 2 ja 3 perusteella $Lu \in H^{-1}(\Omega)$ on hyvin määritelty ja on olemassa $C > 0$ s.e.

$$\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. Osoita, että jos $u \in H^1_0(\Omega)$ on yhtälön (1) heikko ratkaisu, niin määrittelemällä Lu kuten tehtävässä 2 pätee $Lu = f$.

   Lisäksi, käyttämällä tulosta

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | \mathrm{Tr} u = 0\},$$

   joka pätee C^1 alueille Ω [Renardy, Rogers. Thm. 7.41], osoita, että $u \in H^1(\Omega)$ on yhtälön (1) heikko ratkaisu, jos ja vain jos $Lu = f$ ja $\mathrm{Tr} u = 0$.

4. Osoita, että identtinen kuvaus Hilbert-avaruudessa H,

$$\begin{aligned} I : H &\to H \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

   on kompakti, jos ja vain jos $\dim H < \infty$.