Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 4
Ma 12.10.2009, kello 10-12, B322

1. (Palautetaan kirjallisena.) Käy läpi Lax-Milgramin lauseen todistus kompleksisessa tapauksessa.

   Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus, $B : H \times H \to \mathbb{C}$ seskvilineaarinen neliömuoto ($B[\lambda u, \mu w] = \lambda\overline{\mu}B[u,w]$), jolle on $\alpha, \beta > 0$ s.e.

   $$\begin{aligned} |B[u,w]| &\leq \alpha \|u\| \|w\|, \quad u, w \in H, \\ |B[u,u]| &\geq \beta \|u\|^2, \quad u \in H. \end{aligned}$$

   Tällöin kaikilla funktionaaleilla $F : H \to \mathbb{C}$ on yksikäsitteinen $u \in H$ s.e.

   $$B[u,w] = \overline{F(w)}, \quad w \in H.$$

2. Milloin operaattori

   $$L := \sum_{j,k=1}^{n} a^{jk}\partial_j\partial_k + \sum_{j=1}^{n} b^j\partial_j + c$$

   toteuttaa

   $$(Lu, w)_{L^2(\Omega)} = (u, Lw)_{L^2(\Omega)}, \quad u, w \in C_c^\infty(\Omega).$$

3. Osoita, että

   $$\|u\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

4. Osoita, että $\delta \in H^{-1}(\Omega)$, missä $\Omega = (-1,1)$ ja $\langle\delta, \phi\rangle = \phi(0)$.