

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 3
Ma 5.10.2009, kello 10-12, B322

1. Osoita, että tarpeeksi suurella dimensiolla n pätee

$$\frac{1}{|x|} \in H^1(B(0, 1)),$$

missä $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$.

2. Merkitään $\Omega := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, missä n on suuri. Keksi esimerkki funktioista $u \in H_0^1(\Omega)$ ja $F \in L^2(\Omega)$ s.e. u on yhtälön

$$\begin{aligned}\Delta u &= F, & \Omega\text{:ssa,} \\ u|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

heikko ratkaisu ja $u \notin C^2(\Omega)$.

3. Osoita, että jos $u \in H^1(\Omega)$, $\Omega := (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ja $\text{Tr}_{\partial\Omega} u = 0$, niin $u \in H_0^1(\Omega)$.
4. Käy läpi lauseen [Renardy, Rogers. An Introduction to Partial Differential Equations, Theorem 7.36, 2nd ed. (Theorem 6.105, 1st ed.)] todistus tapauksessa $s = 1$, $m = 2$.

Kopio todistuksesta löytyy kurssikansiosta.