9. Dualiteetti

Jos E on vektoriavaruus, niin merkintä $E^{\dagger} = L(E, \mathbb{K})$ tarkoittaa avaruuden E *algebrallista duaalia*. Duaalin $E^{\dagger}$ alkiot ovat avaruuden E lineaarisia muotoja eli *funktionaaleja*. Jos $f \in E^{\dagger}$ ja $x \in E$, niin usein merkitään $\langle x, f \rangle = f(x)$ funktiomerkinnän sijasta. Ehto $(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle$ määrittelee niin sanotun *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^{\dagger} \to \mathbb{K}$.

Normiavaruuden tapauksessa $f \in E^{\dagger}$ voi olla jatkuva tai epäjatkuva, joten tämän motivoimana määrittelemme.

9.1. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E *(topologinen) duaali.*

Siis $E^* = \{x^* : x^* \text{ on jatkuva lineaarikuvaus } E \to \mathbb{K}\}$ on jatkuvien lineaaristen funktionaalien muodostama avaruus, ja $E^* \subset E^{\dagger}$ on vektorialiavaruus. Jos E on äärellisulotteinen, niin $E^* = E^{\dagger}$ (vrt. HT/12:2). Muussa tapauksessa $E^* \neq E^{\dagger}$ (HT/12:5). Jos $x^* \in E^*$, niin jatkuvan funktionaalin x^* normi on Lauseen 6.1 sivulla 103 nojalla

$$\| x^* \| = \sup_{\| x \| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Siis $(E^*, \| \cdot \|)$ on normiavaruus saman Lauseen 6.1 nojalla.

9.2. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin $(E^*, \| \cdot \|)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 6.6, koska $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, missä skalaarikunta $\mathbb{K}$ on täydellinen. □

On usein hyödyllistä kyetä konkreettisesti identifioimaan E^* jos E on annettu Banachin avaruus.

9.3. **Esimerkki.** Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = p/(p-1)$, eli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten p ja q ovat *duaalieksponentteja* (katso luku 2, Määritelmän 2.16 sivulla 15 jälkeinen teksti). Näytämme, että avaruuden $(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ duaali on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \| \cdot \|_q)$ kanssa.

Merkitään

$$e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ kpl.}}, 1, 0, \dots) \in \ell^p,$$

kun $k \in \mathbb{N}$, ja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p,$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

avaruudessa ℓ^p, koska

$$\lim_{n\to\infty} \| x - s_n(x) \|_p^p = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big) = 0.$$

Jos $x^* \in (\ell^p)^*$, $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin lineaarisuuden nojalla

$$\langle\, s_n(x)\,,\, x^*\,\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, x^* \rangle =: \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

missä merkitsemme $y_k = \langle e_k, x^* \rangle$ kun $k \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_n s_n(x) = x$ ja x^* on jatkuva, niin $\lim_n \langle s_n(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$, joten

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{9.4}$$

Näytämme, että $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\langle e_k, x^* \rangle)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Merkitään tätä varten

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0, \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \ell^p, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Tällöin havaitaan, että

$$\| w_n \|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q,$$

koska $p = \frac{q}{q-1}$. Sijoitetaan nyt kaavaan (9.4) muuttujan x paikalle w_n, jolloin

$$\begin{aligned} A := \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = \langle w_n, x^* \rangle = |\langle w_n, x^* \rangle| \leq \| w_n \|_p \| x^* \| \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/p} \| x^* \| = A^{1/p} \| x^* \|. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Kerrotaan yhtälö (9.5) puolittain luvulla $A^{-1/p}$, jolloin

$$A^{1-1/p} = A^{1/q} = \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/q} \leq \| x^* \|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Antamalla $n \to \infty$ saadaan $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ ja $\| y \|_q \leq \| x^* \|$.

Määrittelemme tämän perusteella kuvauksen $T\colon (\ell^p)^* \to \ell^q$ asettaen

$$Tx^* = y,$$

missä siis jono $y = (y_k) = (\langle e_k, x^* \rangle)$. Suoraan määritelmästä seuraa, että T on lineaarinen kuvaus, ja edellä totesimme, että

$$\| Tx^* \|_q \leq \| x^* \|, \quad x^* \in (\ell^p)^*,$$

joten T on jatkuva. Jos $Tx^* = \bar{0}$, niin $\langle e_k, x^* \rangle = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja siis

$$\langle s_n(x), x^* \rangle = \sum_{k=0}^{n} x_k \langle e_k, x^* \rangle = 0,$$

kaikilla $(x_k) \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska x^* on jatkuva ja $\lim_n s_n(x) = x$, niin päättelemme, että $\langle x, x^* \rangle = 0$ jokaisella $x \in \ell^p$, eli $x^* = \bar{0}$. Näin T on injektio.

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön (Lause 2.20 sivulla 16) mukaan

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Tästä seuraa, että kuvaus $\Lambda_y \colon x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^p \to \mathbb{K}$, joten Λ_y on eräs duaaliavaruuden $(\ell^p)^*$ alkio, ja lisäksi

$$\| \Lambda_y \| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \| y \|_q.$$

Määritellään kuvaus S ehdolla $y \mapsto \Lambda_y$, kun $y \in \ell^q$. Edellisen perusteella S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^q \to (\ell^p)^*$, ja $\| Sy \| \leq \| y \|_q$ jokaisella $y \in \ell^q$.

Operaattorin S määritelmästa $\langle e_k, Sy \rangle = \Lambda_y(e_k) = y_k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, joten

$$TSy = (\langle e_k, Sy \rangle)_{k \in \mathbb{N}} = y \quad \text{kaikilla } y = (y_k) \in \ell^q.$$

Tästä seuraa, että $T((\ell^p)^*) = \ell^q$ (eli T on surjektio), ja koska T jo edellä todettiin injektioksi, se on siis bijektio. Lisäksi S on operaattorin T käänteiskuvaus yksikäsitteisyyyden perusteella.

Olkoon lopuksi $x^* \in (\ell^p)^*$ ja $y = Tx^*$. Tällöin siis $Sy = x^*$ ja

$$\| x^* \| = \| Sy \| \leq \| y \|_q = \| Tx^* \|_q \leq \| x^* \|.$$

Tästä seuraa, että $\| Tx^* \|_q = \| x^* \|$ joten T on isometrinen isomorfismi $(\ell^p)^* \to \ell^q$. Voimme siten samaistaa avaruudet $(\ell^p)^*$ ja ℓ^q isometrian T välityksellä. (Tämän takia usein merkitäänkin $q = p'$.)

Koska p ja q ovat symmetrisessä asemassa, niin vastaavasti ℓ^p ja $(\ell^q)^*$ voidaan samaistaa keskenään isometrisesti isomorfisina avaruuksina. Siispä

$$((\ell^p)^*)^* \cong (\ell^q)^* \cong \ell^p.$$

(Tämä tulos voidaan ilmaista sanomalla, että ℓ^p on *refleksiivinen* avaruus, kun $1 < p < \infty$, vrt. biduaali alla).

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $x^* = (y_k) \in \ell^q$, niin kanoninen bilineaarimuoto $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{K}$ (ja siten näiden avaruuksien duaaliteetti) voidaan konkreettisesti esittää muodossa (9.4):

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Erikoistapauksessa $p = q = 2$ tarkasteltavana on Hilbertin avaruus ℓ^2. Tällöin on edellisen esimerkin mukaan $(\ell^2)^* \cong \ell^2$ ja kanoninen bilineaarimuoto voidaan tulkita sisätuloksi

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{\overline{y_k}} = (\, x \,|\, \overline{y} \,),$$

missä $\overline{y} = (\overline{y_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Kuvaus $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\overline{y_k})_{k\in\mathbb{N}} = \overline{y}$ on tässä tapauksessa liittolineaarinen, isometrinen bijektio $\ell^2 \to (\ell^2)^*$. Tähän asiaa palataan yleisemmissä puitteissa (Fréchet-Rieszin lause 9.7 alla).

9.6. **Esimerkki.** (1) Olkoon $n \geq 1$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin osajoukko, sekä μ Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $1 < p < \infty$. Silloin avaruuden $L^p(\Omega)$ duaali on luonnollisella tavalla isometrisesti isomorfinen avaruuden $L^q(\Omega)$ kanssa, missä q on jälleen p:n duaalieksponentti. Tarkemmin sanoen: jokaista $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ vastaa yksikäsitteinen $g \in L^q(\Omega)$, jolle $\|\, \varphi \,\| = \|\, g \,\|_q$ ja

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) \mu(dx), \quad \text{kun } f \in L^p(\Omega).$$

(Katso esimerkiksi W. Rudin: *Real and Complex analysis*, Theorem 6.16.) Tulos pätee myös tapauksessa $p = 1$ (jolloin $q = \infty$), mutta tulos ei ole voimassa, kun $p = \infty$.
(2) Esimerkin 9.3 kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että avaruuden c_0 duaali c_0^* on isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa (HT/12:4), ja avaruuden ℓ^1 duaali $(\ell^1)^*$ isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^∞ kanssa. Sen sijaan avaruuden ℓ^∞ duaali $(\ell^\infty)^*$ *ei ole* isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa. (Itse asiassa, duaalia $(\ell^\infty)^*$ ei voida esittää minään jonoavaruutena, vaan sen "luonnollisen" esityksen muodostavat äärellisesti additiiviset joukkofunktiot $\mathrm{ba}\,(\mathbb{N})$ eli äärellisesti additiiviset mitat (kts. Köthe, Topologische Lineare Räume, §31).)

Hilbertin avaruuden duaali

Olkoon E Hilbertin avaruus ja $x \in E$. Olkoon $f_x \colon E \to \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (\, z \,|\, x \,), \quad z \in E,$$

missä $(\cdot|\cdot)$ on sisätulo $E \times E \to \mathbb{K}$. Välittömästi voimme todeta, että f_x on lineaarinen. Cauchy–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|f_x(z)| = |(z|x)| \leq \| z \| \| x \|$$

jokaisella $z \in E$, joten f_x on jatkuva eli $f_x \in E^*$.

9.7. **Lause** (Fréchet–Rieszin lause)**.** *Jos E on Hilbertin avaruus ja $f_x(z) = (\, z \,|\, x \,)$, kun $x \in E$ ja $z \in E$, niin kuvaus $\Lambda \colon x \mapsto f_x$ määrittelee liittolineaarisen ja isometrisen bijektion $E \to E^*$.*

Todistus. Kuvauksen Λ liittolineaarisuus tarkoittaa, että Λ on additiivinen ja $\Lambda(cx) = \bar{c}\Lambda x$ kaikilla $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$ (tämä seuraa heti sisätulon ominaisuuksista: $f_{cx}(z) = (z|cx) = \bar{c}(z|x) = \bar{c} f_x(z)$ kaikilla $z \in E$). Koska

$$|f_x(z)| \leq \| x \| \| z \|,$$

on $f_x \in E^*$ ja $\| f_x \| \leq \| x \|$. Toisaalta

$$\| x \|^2 = (\, x \,|\, x \,) = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \| f_x \| \| x \|,$$

joten $\| x \| \leq \| f_x \|$ ja siis $\| f_x \| = \| x \|$, eli kuvaus Λ on isometria $E \to E^*$.

Koska jokainen isometria on injektio, niin olemme jo osoittaneet, että kuvaus Λ on jatkuva liittolineaarinen injektio, joka on lisäksi isometria. Meidän on vielä näytettävä, että Λ on surjektio $E \to E^*$.

Olkoon siis $f \in E^*$. Jos $f = \bar{0}$, niin $f(z) = (\, z \,|\, \bar{0} \,)$ jokaisella $z \in E$, eli $f = f_{\bar{0}}$. Olettakaamme siis, että $f \neq \bar{0}$. Merkitään

$$M = \operatorname{Ker}(f) = \{\, z \in E : \ f(z) = 0 \,\}.$$

Koska f on jatkuva ja yksiö $\{0\}$ on suljettu skalaarikunnassa $\mathbb{K}$, on $M = f^{-1}(\{0\})$ avaruuden E suljettu vektorialiavaruus.[12] Lauseen 4.26 sivulla 67 nojalla $E = M \oplus M^\perp$, missä ortokomplementti $M^\perp = \{x \in E : x \perp z \text{ kaikilla } z \in M\}$. Koska $f \neq \bar{0}$, on $M \neq E$ ja $M^\perp \neq \{\bar{0}\}$. Siispä löytyy sellainen $y \in M^\perp$, että $y \neq \bar{0}$.

Olkoon $z \in E$ mielivaltainen. Havaitaan, että tällöin

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0,$$

joten $f(z)y - f(y)z \in \operatorname{Ker}(f) = M$. Koska $y \in M^\perp$, niin

$$0 = (\, f(z)y - f(y)z \,|\, y \,) = f(z)(\, y \,|\, y \,) - f(y)(z|y).$$

Koska $y \neq \bar{0}$, niin $(\, y \,|\, y \,) = \| y \|^2 > 0$, joten ratkaisemalla saadaan esitys

$$f(z) = \frac{f(y)}{\| y \|^2}(z|y) = \Big(\, z \,\Big|\, \frac{\overline{f(y)}}{\| y \|^2} y \Big) =: (\, z \,|\, x \,), \quad \text{kun } z \in E,$$

[12] kts. Topologia I, 15.2.

missä $x = \frac{\overline{f(y)}}{\| y \|^2} y$. Olemme siis osoittaneet, että $f(z) = (\, z \,|\, x \,) = f_x(z)$ jokaisella $z \in E$, joten $f = f_x = \Lambda x$. Siten kuvaus Λ on surjektio $E \to E^*$. $\square$

Fréchet–Rieszin lauseen mukaan Hilbertin avaruuden E jokainen jatkuva lineaarimuoto voidaan esittää sisätulon avulla seuraavasti: $z \mapsto (\, z \,|\, x \,)$, missä vektori$x \in E$ on yksikäsitteisesti määrätty ja kyseessä olevan lineaarifunktionaalin normi on $\| x \|$. Kuvausta $x \mapsto f_x$ sanotaan usein *kanoniseksi kuvaukseksi* $E \to E^*$.

Hahn–Banachin lauseet

Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ sen suljettu aliavaruus, F normiavaruus ja $T \in \mathscr{L}(M, F)$. Tällöin T voidaan jatkaa jatkuvana lineaarikuvauksena koko avaruuteen E, toisin sanoen löytyy sellainen $T_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, jolle $T_1 x = Tx$, kun $x \in M$ ja vieläpä $\| T_1 \| = \| T \|$. Tämä jatko saadaan käyttämällä ortoprojektiota $P_M \colon E \to M$ ja määrittelemällä $T_1 := T P_M$. Jätämme lukijalle harjoitustehtäväksi näyttää, että T_1 on vaadittu jatko.

Tiedetään kuitenkin, että jos edellä E onkin vain Banachin avaruus, niin ei tällä *jatkamisongelmalla* ole aina ratkaisua. (Esimerkiksi, jos T on identtinen kuvaus $I : c_0 \to c_0$ ja $M = c_0 \subset \ell^\infty = E$, niin *voidaan* osoittaa ettei ole olemassa jatkuvaa operaattoria $T_1 \in \mathscr{L}(\ell^\infty, c_0)$, jolle pätisi $T_1 x = x$ kaikilla $x \in c_0$.)

Hahn–Banachin lauseet liittyvät tähän jatkamisongelmaan, jossa tarkastellaan lineaarisia funktionaaleja, eli kuvausten maaliavaruutena on skalaarikunta $F = \mathbb{K}$. Hahn–Banachin lauseet liittyvät myös seuraavaan ongelmaan: jos E on normiavaruus ja $x, y \in E$, $x \neq y$, niin löytyykö sellainen duaalin E^* alkio x^*, että

$$\langle\, x \,,\, x^* \,\rangle \neq \langle\, y \,,\, x^* \,\rangle ?$$

Tämä on eräänlainen *tunnistamisongelma*; kykenemmekö me erottamaan avaruuden E pisteitä jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla? Yleisemmin, minkälaiset konveksit joukot voidaan ”separoida” toisistaan duaalin E^* alkioilla?

Hahn–Banachin lauseet antavat näihin ongelmiin vastauksen. Tulos on varsin syvällinen, ja se on tietyssä mielessä ekvivalentti valinta-aksiomin kanssa (Zornin lemman välityksellä).

Aloitamme todistuksen seuraavalla aputuloksella, jota voi ajatella eräänlaisena induktioaskeleena, sillä todistuksessa myöhemmin käyttöön tuleva Zornin lemma on myös ekvivalentti ns. transfiniittisen induktion kanssa.

9.8. **Lemma.** *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{R}$. Olkoon $M \subset E$ aito vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen* *lineaarinen funktionaali* $M \to \mathbb{R}$*, että* $|f(u)| \le p(u)$ *aina, kun* $u \in M$*. Jos* $z \in E \setminus M$ *ja* $M_1 = M \oplus span\,(z)$*, niin tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali* $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$*, että* $f_1(u) = f(u)$ *jokaisella* $u \in M$ *ja* $|f_1(w)| \le p(w)$ *kaikilla* $w \in M_1$*.*

Todistus. Jos $x, y \in M$, niin

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x-y) \le p(x-y) \le p(x+z) + p(-y-z) \\ &= p(x+z) + p(y+z). \end{aligned}$$

Siispä

$$-p(y+z) - f(y) \le p(x+z) - f(x),$$

kaikilla $x, y \in M$. Koska edellisen arvion oikea puoli ei riipu muuttujasta y, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y+z) - f(y)) \le p(x+z) - f(x)$$

ja edelleen, koska edellisen arvion vasen puoli ei riipu muuttujasta x, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y+z) - f(y)) \le \inf_{x \in M} (p(x+z) - f(x))$$

Tästä voimme päätellä, että on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbb{R}$, että

$$-p(y+z) - f(y) \le c \le p(x+z) - f(x) \tag{9.9}$$

kaikilla $x, y \in M$.

Vakion c avulla saamme nyt laajennuksen määriteltyä avaruuteen M_1. Jos $w \in M_1 = M \oplus \operatorname{span}(z)$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset (tarkista!). Määritellään $f_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_1(w) = f_1(u + \lambda z) = f(u) + \lambda c,$$

missä c on epäyhtälöparissa (9.9) esiintyvä vakio. (Erityisesti siis $f_1(z) = c$ kun valitaan $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$.) Tällöin $f_1 \in (M_1)^\dagger$ ja $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$.

Väitämme, että $|f_1(w)| \le p(w)$ kaikilla $w \in W_1$. Tapaus $\lambda = 0$ on selvä, koska $|f| \le p$ aliavaruudessa M. Olkoon siis $\lambda \ne 0$. Epäyhtälöparista (9.9) seuraa valitsemalla $x = y = \lambda^{-1} u \in M$, että

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \le c \le p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u),$$

kun $u \in M$ ja siis

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda} f(u) \le c \le \frac{1}{|\lambda|} p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda} f(u),$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälöparin

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(w) \le c + \frac{1}{\lambda} f(u)) \le \frac{1}{|\lambda|} p(w) \tag{9.10}$$

kanssa. Koska $w = u + \lambda z$, niin

$$c + \frac{1}{\lambda} f(u) = \frac{1}{\lambda}(f(u) + \lambda c) = \frac{1}{\lambda} f_1(w),$$

ja havaitaan, että epäyhtälöpari (9.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(w) \le \frac{1}{\lambda} f_1(w) \le \frac{1}{|\lambda|} p(w) \Longrightarrow |f_1(w)| \le p(w).$$

Tämä osoittaa väitteen. □

Lemma 9.8 ilmaisee siis sen, että seminormin majoroima vektorialiavaruuden lineaarimuoto voidaan jatkaa samanlaiseksi muodoksi yhtä dimensiota laajempaan avaruuteen. Seuraavaksi osoitetaan, että se voidaan jatkaa koko avaruuteen. Tähän tarkoitukseen käytetään *Zornin lemmaa* (kts. Väisälä: Topologia II, Liite, ss. 170-173).

9.11. **Lause** (Hahn–Banach)**.** *Olkoon E $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, M sen vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $g\colon E \to \mathbb{R}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$ ja $|g(x)| \le p(x)$, kun $x \in E$.*

Todistus. Todistuksen alkuun tarvitsemme hieman merkintöjä. Kun $N_1 \subset N_2$ on kaksi avaruuden E vektorialiavaruutta, $h_1 \in L(N_1, \mathbb{R})$ ja $h_2 \in L(N_2, \mathbb{R})$, niin merkitsemme

$$h_1 \prec h_2 \iff h_2(x) = h_1(x), \text{ kaikilla } x \in N_1.$$

Kun $N \supset M$ on avaruuden E vektorialiavaruus, niin asetamme

$$\mathscr{F}_N = \{\ h \in L(N, \mathbb{R}) :\ f \prec h, \text{ ja } |h(x)| \le p(x) \text{ kaikilla } x \in N\ \}.$$

Tämän jälkeen merkitsemme vielä

$$\mathscr{F} = \bigcup \{\ \mathscr{F}_N :\ N \text{ on avaruuden } E \text{ aliavaruus ja } N \supset M\ \}.$$

Tällöin $f \in \mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$, joten $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Edelleen havaitsemme, että $(\mathscr{F}, \prec)$ muodostaa osittain järjestetyn joukon. (Siis $h \prec h$ kaikilla $h \in \mathscr{F}$, ja aina jos $h_1 \prec h_2$ sekä $h_2 \prec h_3$, niin $h_1 \prec h_3$.)

Olkoon

$$\mathscr{G} = \{\ h_i \in \mathscr{F}_{N_i} :\ i \in \mathcal{I}\ \}$$

jokin joukon $\mathscr{F}$ täysin järjestetty osajoukko. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $h, g \in \mathscr{G}$, niin $h \prec g$ tai $g \prec h$. Nyt yhdiste

$$N = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_i$$

on avaruuden E vektorialiavaruus, kuten helposti huomataan sen perusteella, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Voimme määritellä lineaarimuodon $k \in L(N, \mathbb{R})$ asettamalla

$$k(x) = h_i(x), \quad \text{kun } x \in N_i,$$

mikä on hyvin määritelty, sillä jos $x \in N_i \cap N_j$, niin tällöin $h_i(x) = h_j(x)$. Kuvauksen k lineaarisuus seuraa jälleen välittömästi siitä, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Suoraan kuvauksen k määritelmän seuraa, että $k \in \mathscr{F}$ ja $h_i \prec k$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$. Toisin sanoen k on joukon $\mathscr{G}$ yläraja.

Zornin lemman (kts. Appendix tai Topologia II) nojalla joukossa $\mathscr{F}$ on siten (ainakin yksi) maksimaalinen alkio $g \colon W \to \mathbb{R}$. (*Maksimaalisuus* tarkoittaa tässä, että jos $g \prec h$ ja $h \in \mathscr{F}$, niin $h = g$.) Koska $g \in \mathscr{F}$, niin $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in M$ ja $|g(w)| \leq p(w)$ kaikilla $w \in W$.

Väite. Kuvaus g on etsitty lineaarinen funktionaali, eli $W = E$.

Vastaoletus: $W \neq E$, jolloin on olemassa $z \in E \setminus W$. Lemman 9.8 nojalla löytyy sellainen lineaarimuoto $g_1 \colon W_1 = W \oplus \operatorname{span}(z) \to \mathbb{R}$, että $g(x) = g_1(x)$ kun $x \in W$ ja lisäksi $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in W_1$. Todistuksen merkintöjen mukaan tämä tarkoittaa, että $g_1 \in \mathscr{F}_{W_1}$ ja $g \prec g_1$. Siispä $g_1 \in \mathscr{F}$, mutta $g \neq g_1$, joten saadaan ristiriita ettei g olekaan maksimaalinen alkio. $\square$

Lauseen 9.11 perustyyppi on ensimmäisen kerran esiintynyt (hieman rajoitetummassa muodossa) eräässä Hans Hahnin julkaisussa vuonna 1927, ja hiukan Lausetta 9.11 yleisemmässä muodossa Stefan Banachilla vuodelta 1929. Näissä on oleellista se, että E on reaalinen vektoriavaruus. Tämän lauseen yleistivät kompleksiseen avaruuteen vuonna 1938 samanaikaisesti Yhdysvalloissa Bohnenblust ja Sobczyk, sekä Neuvostoliitossa Suhomlinov.

Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus. Koska $\mathbb{R}$ on kompleksilukujen $\mathbb{C}$ alikunta, on siis tulo λx määritelty, kun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in E$, joten E voidaan luonnollisella tavalla varustaa myös $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurilla. Merkitsemme E_r:llä avaruutta E tulkittuna reaaliseksi vektoriavaruudeksi.

Olkoon f ($\mathbb{C}$-)lineaarinen funktionaali $E \to \mathbb{C}$, eli $f \in E^\dagger$. Merkitsemme

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \text{ kun } x \in E,$$

missä reaali- ja imaginaariosat

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}) \in \mathbb{R}$$

kun $x \in E$. Siispä f_1, f_2 ovat $\mathbb{R}$-lineaarisia kuvauksia $E_r \to \mathbb{R}$. Koska $f(ix) = i f(x)$, kun $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix) = i(f_1(x) + i f_2(x)) = i f_1(x) - f_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$f_1(ix) = \operatorname{Re}(f(ix)) = \operatorname{Re}(if_1(x) - f_2(x)) = -f_2(x),$$

eli $f_2(x) = -f_1(ix)$, joten saamme esityksen

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \tag{9.12}$$

kun $x \in E$.

Kääntäen, jos f_1 on lineaarinen funktionaali $E_r \to \mathbb{R}$, eli $f_1 \in (E_r)^\dagger$, niin asetamme

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E.$$

Siis f on kuvaus $E \to \mathbb{C}$. Koska $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$, niin välittömästi toteamme kuvauksen f määritelmän nojalla, että $f(x+y) = f(x)+f(y)$ kaikilla $x, y \in E$. Jos $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) = i(f_1(x) - if_1(ix) = if(x).$$

Olkoon nyt $c = a + ib \in \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, ja olkoon $x \in E$. Edellä tehtyjen havaintojen nojalla on tällöin

$$f(cx) = f((a+ib)x) = f(ax)+f(ibx) = af(x)+if(bx) = (a+ib)f(x) = cf(x).$$

Siis f on ($\mathbb{C}$-)lineaarinen funktionaali $E \to \mathbb{C}$, eli $f \in E^\dagger$.

Olemme siten todistaneet, että algebrallisen duaalin $E^\dagger$ alkiot ovat täsmälleen ne kuvaukset $f\colon E \to \mathbb{C}$, jotka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in E,$$

missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarinen funktionaali $E_r \to \mathbb{R}$.

Tämän avulla voimme nyt osoittaa kompleksisen version Hahn–Banachin lauseesta.

9.13. **Lause** (Bohnenblust–Sobczyk–Suhomlinov)**.** *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$, missä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Olkoon M avaruuden E vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarinen funktionaali $M \to \mathbb{K}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarinen funktionaali $g\colon E \to \mathbb{K}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$, ja $|g(x)| \le p(x)$ kaikilla $x \in E$.*

Todistus. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on sama kuin Lause 9.11. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ palautetaan reaaliselle versiolle 9.11 seuraavasti.

Nimittäin, kompleksisessa tapauksessa

$$f(u) = f_1(u) - if_1(iu), \tag{9.14}$$

kun $u \in M$, missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarimuoto $M_r \to \mathbb{R}$. Koska reaaliosa

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}),$$

niin

$$|f_1(x)| = \frac{1}{2}|f(x) + \overline{f(x)}| \leq \frac{1}{2}(|f(x)| + |\overline{f(x)}|) = |f(x)| \leq p(x)$$

kaikilla $x \in M$.

Hahn–Banachin lauseen 9.11 nojalla on siis olemassa sellainen $\mathbb{R}$-lineaarinen muoto (eli funktionaali) $g_1 \colon E \to \mathbb{R}$, että $g_1(u) = f_1(u)$, kun $u \in M$, ja $|g_1(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in E_r$. Asetamme:

$$g(x) = g_1(x) - i g_1(ix), \tag{9.15}$$

kun $x \in E$. Tällöin g on lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$ ja

$$g(u) = g_1(u) - i g_1(iu) = f_1(u) - i f_1(iu) = f(u)$$

kaikilla $u \in M$.

On lopuksi osoitettava, että $|g(x)| \leq p(x)$ jokaisella $x \in E$. Olkoon $x \in E$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{C}$, että $|\lambda| = 1$ ja

$$|g(x)| = \lambda g(x).$$

Kuvaus g on $\mathbb{C}$-lineaarinen, joten $g(\lambda x) = \lambda g(x) = |g(x)| \geq 0$, jolloin kuvauksen g määritelmän (9.15) nojalla

$$g(\lambda x) = g_1(\lambda x).$$

Koska $|\lambda| = 1$, niin edellisen perusteella siis

$$|g(x)| = |\lambda|\,|g(x)| = |\lambda g(x)| = |g(\lambda x)| = |g_1(\lambda x)| \leq p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x).$$

Näin ollen g täyttää vaaditut ehdot. $\square$

9.16. *Huomautus.* Myös Lausetta 9.13 sanotaan usein *Hahn–Banachin* lauseeksi, samoin kuin esimerkiksi seuraavaa lausetta (Lause 9.17), jota voidaan pitää Lauseen 9.13 seurauslauseena.

Seuraavaksi sovellamme edellä olleita lauseita erilaisten *jatkuvien* lineaaristen funktionaalien rakentamiseen normiavaruuksissa tai Banachin avaruuksissa.

9.17. **Lause** (Hahn-Banach)**.** *Olkoon E normiavaruus, M sen vektorialiavaruus ja $u^* \in M^*$ jatkuva lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $\langle u \,, x^* \rangle = \langle u \,, u^* \rangle$, kun $u \in M$, ja $\| x^* \| = \| u^* \|$.*

Todistus. Määritellään (semi)normi p avaruudessa E asettamalla

$$p(x) = \| x \| \| u^* \|,$$

kun $x \in E$. Tällöin

$$|\langle u , u^* \rangle| \leq \| u \| \| u^* \| = p(u),$$

kun $u \in M$ ja siis Lauseen 9.13 nojalla on olemassa sellainen lineaarinen kuvaus $x^* \in E^\dagger$, että $\langle u , x^* \rangle = \langle u , u^* \rangle$, kun $u \in M$ ja

$$|\langle x , x^* \rangle| \leq p(x) = \| x \| \| u^* \|$$

kaikilla $x \in E$. Siispä x^* on jatkuva, eli $x^* \in E^*$, ja $\| x^* \| \leq \| u^* \|$. Toisaalta,

$$\begin{aligned} \| u^* \| &= \sup\{ |\langle u , u^* \rangle| : \ \| u \| \leq 1, \ u \in M \} \\ &= \sup\{ |\langle u , x^* \rangle| : \ \| u \| \leq 1, \ u \in M \} \\ &\leq \sup\{ |\langle x , x^* \rangle| : \ \| x \| \leq 1, \ x \in E \} = \| x^* \|, \end{aligned}$$

joten itse asiassa $\| x^* \| = \| u^* \|$. □

Lauseen 9.17 mukaan siis normiavaruuden vektorialiavaruuden jatkuva lineaarimuoto voidaan jatkaa koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi siten, että sen normi säilyy muuttumattomana (mikä on erityisen hyödyllistä). Lauseen 9.17 avulla voidaan esimerkiksi tuottaa jatkuva funktionaali, joka ”laajentaa” suppenevien jonojen raja-arvon käsitettä kaikille *rajoitetuille* jonoille.

9.18. **Esimerkki.** On olemassa sellainen jatkuva lineaarinen $x^* \colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$, että $\|x^*\| = 1$ ja

$$x^*(x) = \lim_{k\to\infty} x_k, \quad \text{kaikilla } x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c,$$

missä $c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ olemassa}\}$ on suppenevien jonojen avaruus. (Tässä $c \subset \ell^\infty$ on suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen, vrt. Lause 3.19).

Todistus. Asetetaan

$$\ell(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$$

kun $x = (x_k) \in c$. Raja-arvon perusominaisuuksista seuraa, että $\ell \colon c \to \mathbb{R}$ on lineaarinen. Lisäksi

$$|\ell(x)| = |\lim_{k\to\infty} x_k| \leq \limsup_{k\to\infty} |x_k| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|_\infty$$

kaikilla $x = (x_k) \in c$, joten ℓ on jatkuva ja $\|\ell\| \leq 1$. Lisäksi, koska $\ell(\mathbf{1}) = 1$, missä $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$, niin $\|\ell\| = 1$.

Hahn-Banachin lauseen (version 9.17) nojalla on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in (\ell^\infty)^*$, että $\|x^*\| = \|\ell\| = 1$, ja

$$x^*(x) = \ell(x) = \lim_{k\to\infty} x_k, \text{ kun } x = (x_k) \in c.$$

□

Seuraava tulos jatkaa Lauseen 9.17 teemoja.

9.19. **Lause.** *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus, ja $x_0 \in E$ sellainen vektori, että $d = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $x^* \in E'$, että $x^*(M) = \{0\}$, $\langle x_0 , x^* \rangle = d$ ja $\| x^* \| = 1$.*

Todistus. Merkitään $W = M \oplus \operatorname{span}(x_0)$. Jos $z \in W$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteisiä. Asetetaan $\langle z , z^* \rangle = \lambda d$. Tällöin z^* on lineaarinen muoto $W \to \mathbb{K}$, eli $z^* \in W^\dagger$. Jos $u = \bar{0}$ ja $\lambda = 1$, niin saadaan $\langle x_0 , z^* \rangle = d$. Jos $\lambda = 0$, niin $\langle z , z^* \rangle = 0$ kaikilla $z \in M$, joten $z^*(M) = \{0\}$. Oletamme seuraavassa, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$|\langle z , z^* \rangle| = |\lambda d| \leq |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} + x_0 \right\| = \| u + \lambda x_0 \| = \| z \|,$$

sillä $d \leq \| \lambda^{-1} u + x_0 \|$, koska $\lambda^{-1} u \in M$. Päättelemme, että $z^* \in W^*$ ja $\| z^* \| \leq 1$.

Tarkistetaan seuraavaksi, että itse asiassa $\| z^* \| = 1$. Tätä varten olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $d = \inf\{ \| x_0 - u \| : \ u \in M \}$, niin löytyy sellainen $u \in M$, että $\| x_0 - u \| < d + \varepsilon$. Nyt

$$|\langle x_0 - u , z^* \rangle| = |\langle x_0 , z^* \rangle| = d,$$

joten normitetulle vektorille $\frac{x_0 - u}{\| x_0 - u \|}$ pätee

$$\begin{aligned} \| z^* \| &= \sup\{ |\langle u , z^* \rangle| : \ u \in W, \ \| u \| \leq 1 \} \geq \frac{|\langle x_0 - u , z^* \rangle|}{\| x_0 - u \|} \\ &= \frac{d}{\| x_0 - u \|} > \frac{d}{d + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Tästä päättelemme, että $\| z^* \| \geq 1$. Nyt voimme soveltaa Lausetta 9.17, joka takaa sellainen jatkuvan lineaarifunktionaalin $x^* \in E^*$ olemassaolon, jolle $\langle x , x^* \rangle = \langle x , z^* \rangle$, kun $x \in W$, ja $\| x^* \| = \| z^* \|$. Tällöin siis $x^*(M) = \{0\}$, $\langle x_0 , x^* \rangle = \langle x_0 , z^* \rangle = d$ ja $\| x^* \| = 1$. □

9.20. **Seuraus.** *Jos $x_0 \neq \bar{0}$ on normiavaruuden E vektori, niin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in E^*$, että $\langle x_0 , x^* \rangle = \| x_0 \|$ ja $\| x^* \| = 1$.*

Todistus. Jos $M = \{\bar{0}\}$, niin $\operatorname{dist}(x_0, M) = \| x_0 \|$. Väite seuraa siten välittömästi Lauseesta 9.19. □

Seuraava ”duaalikaava” normin laskemiseksi on usein hyödyllinen.

9.21. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin*

$$\| x \| = \max\{ |\langle x , x^* \rangle| : x^* \in E^*, \| x^* \| \le 1 \}. \tag{9.22}$$

Erityisesti, jos $x \in E$ on sellainen vektori, että $\langle x , x^* \rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, niin $x = \bar{0}$.

Todistus. Jos $\| x^* \| \le 1$, niin

$$|\langle x , x^* \rangle| \le \| x \| \| x^* \| \le \| x \|,$$

joten

$$\sup_{\| x^* \| \le 1} |\langle x, x^* \rangle| \le \| x \|.$$

Voidaan olettaa, että $x \ne \bar{0}$, koska kaava (9.22) on ilmeinen kun $x = \bar{0}$. Tällöin Seurauksen 9.20 nojalla on olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että

$$|\langle x , x^* \rangle| = \| x \| \quad \text{ja} \quad \| x^* \| = 1,$$

joten $\| x \| \le \max |\langle x, x^* \rangle|$.

Jos nyt $\langle x , x^* \rangle = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$, niin normikaavasta (9.22) seuraa, että $\|x\| = 0$, eli siis $x = \bar{0}$. □

9.23. **Lause.** *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on tiheä avaruudessa E, eli $\overline{M} = E$, silloin ja vain silloin kun avaruudella M on seuraava ominaisuus: Jos $x^* \in E^*$ ja $x^*(M) = \{0\}$, niin $x^* = \bar{0}$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\overline{M} = E$. Jos tällöin $x^*(M) = \{0\}$, niin $M \subset \operatorname{Ker}(x^*)$ ja siis $E = \overline{M} \subset \operatorname{Ker}(x^*)$. Tällöin $E = \operatorname{Ker}(x^*)$, eli $x^* = \bar{0}$.

Oletetaan kääntäen, että $\overline{M} \ne E$. Tällöin löytyy sellainen vektori $x_0 \in E$, että $\operatorname{dist}(x_0, M) = \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$. Lauseen 9.19 nojalla olemassa sellainen $x^* \in E^*$, että $x^*(M) = \{0\}$ ja $\| x^* \| = 1$, (jolloin toki $x^* \ne \bar{0}$). Siis avaruudella M ei ole väitteen ominaisuutta. (Erityisesti, jos avaruudella M on väitteen ominaisuus, niin välttämättä $\overline{M} = E$.) □

Lisätietoja. Olkoon E $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus sekä $K \subset E$ suljettu ja *konveksi* osajoukko ($K \ne \varnothing$). Olkoon $x_0 \in E$ vektori, jolle $x_0 \notin K$. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in E^*$, että

$$\langle x_0, x^* \rangle > \sup_{x \in K} \langle x, x^* \rangle$$

Tämä *geometrinen* Hahn-Banachin *separaatiolause* on vahvempi versio Lauseesta 9.13, ja se on varsin hyödyllinen monissa yhteyksissä. Todistus kuitenkin sivuutetaan tällä kurssilla. (kts. esim. Werner: Funktionalanalysis, luku III.2).

Bilineaarimuodot ja Lax–Milgramin lause

Fréchet–Rieszin lauseen sovelluksena todistamme Lax–Milgramin lauseen, jota voi soveltaa differentiaaliyhtälöihin. Lause koskee Hilbertin avaruuksien jatkuvia bilineaarimuotoja.

9.24. **Määritelmä.** Olkoon E, F ja G vektoriavaruuksia. Sanomme, että kuvaus $B\colon E\times F\to G$ on bilineaarinen, jos $x\mapsto B(x,y)$ on lineaarinen jokaisella $y\in F$ ja $y\mapsto B(x,y)$ on lineaarinen jokaisella $x\in E$.

Myös bilineaarikuvauksille jatkuvuus on sama kuin rajoittuneisuus (vrt. 2.30).

9.25. **Lause.** *Olkoon E, F ja G normiavaruuksia. Tällöin bilineaarinen kuvaus $B\colon E\times F\to G$ on jatkuva jos ja vain jos on olemassa sellainen $M<\infty$, että*

$$\|B(x,y)\|\le M\|x\|\|y\| \textit{ kaikilla } (x,y)\in E\times F.$$

Sanomme edellä, että bilineaarikuvaus B on *rajoitettu*. Laskujen helpottamiseksi varustetaan tuloavaruus $E\times F$ normilla

$$\|(x,y)\|=\max(\|x\|,\|y\|),\quad \text{kun } (x,y)\in E\times F.$$

(Helposti nähdään, että $\|(x,y)\|$ on ekvivalentti aikaisemmin käytetyn normin $\|(x,y)\|_1=\|x\|+\|y\|$ kanssa.)

Todistus. (Jatkossa tarvitaan Lauseesta 9.25 ainoastaan implikaatio ”$\Rightarrow$”, joten jätetään käänteinen suunta vapaaksi HT:ksi). Jos B on jatkuva $E\times F\to G$, niin erityisesti B on jatkuva origossa $(\bar 0,\bar 0)$. Tällöin on olemassa sellainen $r>0$, että $\|B(x,y)\|<1$ aina kun $\|(x,y)\|=\max(\|x\|,\|y\|)\le r$.

Olkoon nyt $(x,y)\in E\times F$ mielivaltainen pistepari. Voidaan olettaa, että $x\ne\bar 0$ ja $y\ne\bar 0$ (nimittäin, selvästi $B(x,y)=\bar 0$ jos $x=\bar 0$ tai $y=\bar 0$). Tällöin $\|(r\frac{x}{\|x\|},r\frac{y}{\|y\|})\|=r$, joten kuvauksen B bilineaarisuudesta seuraa, että

$$1>\|B(r\frac{x}{\|x\|},r\frac{y}{\|y\|})\|=\frac{r^2}{\|x\|\,\|y\|}\|B(x,y)\|.$$

Siis $\|B(x,y)\|\le r^{-2}\|x\|\,\|y\|$ kaikilla $(x,y)\in E\times F$. □

Fréchet–Rieszin lauseen avulla voimme nyt karakterisoida Hilbertin avaruuksien jatkuvat bilineaarimuodot, eli jatkuvat bilineaarikuvaukset joiden maaliavaruutena on $\mathbb{K}$.

9.26. **Seuraus.** *Olkoon E $\mathbb{R}$-kertoiminen Hilbertin avaruus ja $B\colon E\times E\to\mathbb{R}$ bilineaarinen ja jatkuva. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $T\in\mathscr{L}(E)$, jolle*

$$B(x,y)=(\,x\,|\,Ty\,)\quad \textit{jokaisella } x,y\in E.$$

Todistus. Jos $y \in E$, niin kuvaus $B_y \colon x \mapsto B(x,y)$ on jatkuva ja lineaarinen, eli $B_y \in E^*$. Fréchet–Rieszin lauseen 9.7 nojalla on olemassa sellainen *yksikäsitteinen* alkio $T(y) \in E$, että

$$B_y(x) = B(x,y) = (\, x \,|\, T(y) \,) \quad \text{jokaisella } x \in E.$$

Yksikäsitteisyyden nojalla kuvaus $T \colon y \mapsto T(y)$ on lineaarinen (tarkista!). Se on myös jatkuva: koska B on jatkuva, niin Lauseen 9.25 perustella on olemassa $M < \infty$, jolle

$$\| \, Ty \, \|^2 = (\, Ty \,|\, Ty \,) = B(y, Ty) \leq M \| \, y \, \| \| \, Ty \, \|, \quad \text{kun } y \in E.$$

Tästä $\| \, Ty \, \| \leq M \| \, y \, \|$ jokaisella $y \in E$. □

9.27. **Määritelmä.** Jos E on reaalinen Hilbertin avaruus, niin sanomme, että bilineaarimuoto $B \colon E \times E \to \mathbb{R}$ on *koersiivinen*, jos löytyy sellainen $C > 0$, että $B(x,x) \geq C \| \, x \, \|^2$ jokaisella $x \in E$.

9.28. **Lause** (Lax–Milgram). *Olkoon B jatkuva, koersiivinen bilineaarimuoto Hilbertin avaruudessa E. Jos $w \in E^*$, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen $u \in E$, että*

$$B(x,u) = \langle \, x \, , \, w \, \rangle \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{9.29}$$

Todistus. Olkoon $w \in E^*$. Fréchet–Rieszin lauseen 9.7 nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen $v \in E$, jolle $\langle \, x \, , \, w \, \rangle = (\, x \,|\, v \,)$ jokaisella $x \in E$. Seurauslauseen 9.26 mukaan löydämme operaattorin $T \in \mathscr{L}(E)$, jolle $B(x,y) = (\, x \,|\, Ty \,)$ jokaisella $x, y \in E$.

Väite. T on bijektio.

Nimittäin, jos $x \in E$, niin koersiivisuuden ja Cauchy-Schwarzin nojalla

$$C\|x\|^2 \leq B(x,x) = (\, x \,|\, Tx \,) \leq \|x\| \cdot \|Tx\|,$$

joten $\|Tx\| \geq C\|x\|$, missä vakio $C > 0$. Näin T on alhaalta rajoitettu, joten T on injektio ja kuva $Im(T) \subset E$ on suljettu (vrt. HT 4:3). Lisäksi, jos $x \in (Im(T))^\perp$, niin oletuksen perusteella

$$0 = (\, x \,|\, Tx \,) = B(x,x) \geq C\|x\|^2,$$

joten $x = \bar{0}$. Näin $Im(T) = E$, eli T on surjektio. Valitaan nyt $u = T^{-1}v$, jolloin $B(x,u) = (\, x \,|\, v \,) = \langle \, x \, , \, w \, \rangle$ kaikilla $x \in E$, joten ehto (9.29) on voimassa.

Jos myös $u_1 \in E$ toteuttaa ehdon (9.29), niin alkion v yksikäsitteisyyden nojalla

$$(\, x \,|\, Tu_1 \,) = B(x,u_1) = \langle \, x \, , \, w \, \rangle = (\, x \,|\, v \,) = (\, x \,|\, Tu \,)$$

jokaisella $x \in E$. Tällöin $Tu = Tu_1$, ja koska T on bijektio, niin $u = u_1$. □

9.30. *Huomautus.* (1) Fréchet-Rieszin esityslause on Lax-Milgramin lauseen "erikoistapaus", missä bilineaarinen muoto $B : E \times E \to \mathbb{R}$ on $B(x, y) = (x|y)$, kun $(x, y) \in E \times E$, eli avaruuden E sisätulo.
(2) Lax-Milgramin lauseella on myös kompleksinen versio. Jos Hilbertin avaruuden E skalaarikunta on $\mathbb{C}$, niin oletetaan, että $B : E \times E \to \mathbb{C}$ on jatkuva, $x \mapsto B(x, y)$ on lineaarinen kaikilla $y \in E$, $y \mapsto B(x, y)$ on *liittolineaarinen* kaikilla $x \in E$, sekä sen reaaliosa toteuttaa

$$\operatorname{Re} B(x, x) \geq C\| x \|^2, \quad \text{kaikilla } x \in E$$

jollakin vakiolla $C > 0$. Todistus kompleksisessa tapauksessa on samanlainen kuin Lauseen 9.28 todistus.

Huom.: sivujen 154 - 156 SL-sovellusta ei luennoitu 2008

Sovellamme Lax–Milgramin lausetta seuraavan epähomogeeniseen Sturmin–Liouvillen ongelmaan (vertaa luvun 5 homogeenisen Sturmin - Liouvillen ongelman käsittelyä, missä $f = \bar{0}$, sekä lisäksi $q(x) \geq \delta > 0$ kaikilla $x \in [0, 1]$)

$$\text{(SL')} \qquad \begin{cases} -(pu')' + qu = f, & \text{kun } x \in (0, 1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

missä $p \in C^1(0, 1)$, $q \in C(0, 1)$, $f \in L^2(0, 1)$ ovat annettuja ja $p(x) \geq \delta > 0$ ja $q(x) \geq 0$. Muistutamme, että $H_0^1(0, 1) = \{\ f \in H^1(0, 1) :\ f(0) = f(1) = 0\ \}$ on Sobolevin avaruuden $H^1(0, 1)$ suljettu vektorialiavaruus. Tarvitsemme seuraavan aputuloksen

9.31. **Lemma** (Poincarén epäyhtälö)**.** *On olemassa vakio $C > 0$, jolle*

$$\| f \|_{H^1(0,1)} \leq C\| f' \|_{L^2(0,1)}$$

kaikilla $f \in H_0^1(0, 1)$.

Todistus. Jos $f \in H_0^1(0, 1)$, niin Lauseen 5.21 sivulla 93 nojalla melkein kaikilla $x \in [0, 1]$ on voimassa

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \Big| \int_0^x f'(t)\, \mathrm{d}t \Big| \leq \| f' \|_{L^1(0,1)},$$

mistä seuraa, että $\| f \|_\infty \leq \| f' \|_1$. Hölderin epäyhtälön nojalla siis

$$\| f \|_2^2 \leq \| f \|_\infty \| f \|_1 \leq \| f' \|_1 \| f \|_2 \leq \| f' \|_2 \| f \|_2,$$

joten $\| f \|_2 \leq \| f' \|_2$. Väite seuraa nyt avaruuden $H^1(0, 1)$ normin määritelmästä. $\square$

9.32. **Lause.** *Tehtävällä* (SL') *on yksikäsitteinen heikko ratkaisu $u \in H_0^1(0, 1)$. Jos $f \in C(0, 1)$, on $u \in C^2(0, 1)$ ja se on tehtävän* (SL') *klassinen ratkaisu.*

Heikko ratkaisu tarkoittaa tässä funktiota $u \in H_0^1(0,1)$, jolle

$$\int_0^1 [p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.33}$$

jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Todistus. (1) Kuten luvussa 5 näemme, että jokainen tehtävän (SL') klassinen ratkaisu on myös heikko ratkaisu.
(2) Määritellään Hilbertin avaruudessa $E := (H_0^1(0,1), \|\cdot\|_{H^1(0,1)}$ bilineaarimuoto

$$B(u,v) = \int_0^1 [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Koska $p, q \in C(0,1)$, niin $\| p \|_\infty \leq M$ ja $\| q \|_\infty \leq M$ jollakin $M < \infty$. Siispä Hölderin epäyhtälön avulla saamme

$$|B(u,v)| \leq M \int_0^1 [\ |u'(x)v'(x)| + |u(x)v(x)|\ ]\,\mathrm{d}x \leq C\| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1},$$

joten B on jatkuva. Poincarén epäyhtälön seurauksena B on myös koersiivinen, sillä

$$\begin{aligned}\| u \|_{H^1}^2 \leq C\| u' \|_{L^2}^2 = C\int_0^1 u'(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C\delta^{-1}\int_0^1 p(x)u'(x)^2\,\mathrm{d}x \\ \leq C\delta^{-1}\int_0^1 [p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2]\,\mathrm{d}x = C\delta^{-1}B(u,u).\end{aligned}$$

Edellä käytimme hyväksi oletusta $p(x) \geq \delta$ ja $q(x) \geq 0$.
(3) Löydämme tehtävän (SL') heikon ratkaisun nyt seuraavasti: Koska $f \in L^2(0,1)$ on lineaarikuvaus

$$w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

jatkuva $E \to \mathbb{R}$, joten $w \in E^*$. Lax–Milgramin lauseen nojalla (koska B toteuttaa Lax–Milgramin lauseen ehdot kohdan (2) perusteella) löydämme yksikäsitteisen funktion $u \in E$, jolle

$$B(\varphi,u) = \int_0^1 [p(x)\varphi'(x)u'(x) + q(x)\varphi(x)v(x)]\,\mathrm{d}x = w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

jokaisella $\varphi \in E$. Määritelmän (9.33) nojalla tämä on tehtävän (SL') yksikäsitteinen heikko ratkaisu (sillä $\mathscr{D}(0,1) \subset E$).
(4) Voidaan osoittaa, kuten luvussa 5, että $u \in C^2(0,1)$ jos $f \in C(0,1)$. □

Huomautamme vielä, että yleisempi tehtävä

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

missä p, q ja f ovat kuten edellä ja $r \in C(0,1)$, palautuu tehtävään (SL') kertomalla ylempi yhtälö funktiolla

$$\zeta(x) = \exp\Big(- \int^x \frac{r(t)}{p(t)} \, \mathrm{d}t \Big)$$

ja käyttämällä identiteettiä $\zeta' p + \zeta r = 0$. (Katso Brezis, VIII. 4, mistä löytyy myös muita Lax–Milgramin lauseen sovelluksia).

Biduaali

9.34. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E^{**} := (E^*)^*$ on avaruuden E *biduaali.*

Tiedämme, että normiavaruuden E biduaali on aina Banachin avaruus. Olkoon $x \in E$ kiinteä ja tarkastellaan sen määräämää kuvausta $J_x \colon E^* \to \mathbb{K}$, missä

$$J_x(x^*) = \langle x, x^* \rangle, \quad x^* \in E^*.$$

Havaitsemme, että $J_x \in (E^*)^*$: kuvaus J_x on lineaarinen, sillä

$$J_x(\alpha x^* + \beta y^*) = \langle\, x \,,\, \alpha x^* + \beta y^* \,\rangle = \alpha \langle\, x \,,\, x^* \,\rangle + \beta \langle\, x \,,\, y^* \,\rangle = \alpha J_x(x^*) + \beta J_x(y^*),$$

kun $x^*, y^* \in E^*$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Edelleen

$$|J_x(x^*)| = |\langle\, x \,,\, x^* \,\rangle| \leq \|\, x \,\| \|\, x^* \,\|, \quad x^* \in E^*,$$

joten J_x on myös jatkuva $E^* \to \mathbb{K}$.

Siispä $J_x \in E^{**}$ jokaisella $x \in E$, missä J_x riippuu vektorista $x \in E$. Merkitsemme näin muodostunutta kuvausta $J \colon E \to E^{**}$, eli $Jx = J_x$ kun $x \in E$. (Joskus käytetään tästä kuvauksesta merkintä J_E selvyyden vuoksi.) Kuvauksen J määrittelee siis ehto

$$\langle\, x^* \,,\, Jx \,\rangle = \langle\, x \,,\, x^* \,\rangle, \quad x \in E, x^* \in E^*.$$

Sanomme, että J on *kanoninen kuvaus* $E \to E^{**}$.

9.35. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin kanoninen kuvaus $J \colon E \to E^{**}$ on lineaarinen isometria.*

Todistus. Olkoon $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ja $x^* \in E^*$. Tällöin

$$\begin{aligned} \langle\, x^* \,,\, J(\alpha x + \beta y) \,\rangle &= \langle\, \alpha x + \beta y \,,\, x^* \,\rangle = \alpha \langle\, x \,,\, x^* \,\rangle + \beta \langle\, y \,,\, x^* \,\rangle \\ &= \alpha \langle\, x^* \,,\, Jx \,\rangle + \beta \langle\, x^* \,,\, Jy \,\rangle, \end{aligned}$$

joten $J(\alpha x + \beta y) = \alpha Jx + \beta Jy$. Lisäksi normin duaalikaavan (Seuraus 9.21) nojalla

$$\|Jx\| = \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x^*, Jx \rangle| = \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|$$

kaikilla $x \in E$, joten J on isometria. (Edellä $B_{E^*} = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ on duaalin E^* suljettu yksikköpallo.) $\square$

Koska E^{**} on Banachin avaruus, niin lauseen 9.35 mukaan $J(E) \subset E^{**}$ on vektorialiavaruus, joka on isometrisesti isomorfinen avaruuden E kanssa. Nyt jos E on Banachin avaruus, niin $J(E)$ on suljettu. Jos E ei ole täydellinen, ei myöskään $J(E)$ ole suljettu. (Kuitenkin voimme puhua vektorialiavaruuden $J(E)$ sulkeumasta avaruudessa E^{**}. Sanommekin, että Banachin avaruus $\overline{J(E)}$ on avaruuden E *täydentymä* ja merkitsemme $\widehat{E} := \overline{J(E)}$. Jokaiselle normiavaruudelle E siis löytyy Banachin avaruus F (esimerkiksi $F = \widehat{E}$) ja sellainen lineaarinen isometria $T\colon E \to F$, että $T(E) \subset F$ on tiheä. Voidaan myös osoittaa, että jokainen tällainen F on itse asiassa lineaarisesti isometrinen täydentymän $\widehat{E}$ kanssa.)

Voidaan kysyä onko aina $J(E) = E^{**}$? Tämä johtaa seuraavaan käsitteeseen.

9.36. **Määritelmä.** Normiavaruus E on *refleksiivinen*, jos $J(E) = E^{**}$.

Refleksiivisyyden määritelmässä kanonisen upotuksen $J : E \to E^{**}$ rooli on keskeinen: on nimittäin olemassa ei-refleksiivinen Banachin avaruus E jolle E ja E^{**} ovat lineaarisesti isomorfisia (eli on olemassa lineaarinen isomorfismi $U : E \to E^{**}$).

Koska edellä E^{**} on aina Banachin avaruus, niin välttämätön ehto refleksiivisyydelle on, että E on Banachin avaruus. Jos E on refleksiivinen, niin E ja E^* ovat toisiinsa nähden symmetrisessä asemassa.

9.37. **Esimerkki.** (1) Jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on refleksiivinen: tällöin on nimittäin $E^* = E^\dagger$ ja siten $\dim(E) = \dim(E^*) = \dim(E^{**})$. Tällöin J on bijektio.

(2) Jos $1 < p < \infty$, niin ℓ^p on refleksiivinen: $(\ell^p)^* = \ell^q$, missä q on p:n duaalieksponentti ($1/p + 1/q = 1$), ja

$$\langle\, x \,,\, y^* \,\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k y_k,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p$, $y^* = (y_l) \in \ell^q$. Siis $J : \ell^p \to (\ell^p)^{**} = \ell^p$ on identtinen kuvaus.

(3) Vastaavasti, jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin voidaan osoittaa, että $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$. Dualiteetilla on luonnollinen esitys

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle = \int_\Omega f(t)g(t)d\mu$$

missä $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Tästä seuraa, että $L^p(\Omega)$ on refleksiivinen jos $1 < p < \infty$.

(4) Voidaan osoittaa, että seuraavat avaruudet *eivät* ole refleksiivisiä: c_0, c, ℓ^1, ℓ^∞, $C(0,1)$, $L^1(\Omega)$ ja $L^\infty(\Omega)$.
(5) Olkoon E Hilbertin avaruus, $x \in E$ ja $z \in E$. Jos merkitsemme $f_x(z) = (\,z\,|\,x\,)$, niin Fréchet–Rieszin lauseen mukaan kuvaus $\rho : x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen isometrinen bijektio $E \to E^*$. Tällöin E^* on Hilbertin avaruus sisätulon

$$(\rho(x)|\rho(y) = (y|x), \quad x, y \in E$$

suhteen (tarkista!). Olkoon $\tau : E^* \to E^{**}$ Fréchet-Rieszin lauseen antama liittolineaarinen isometrinen bijektio. Tällöin kanoninen kuvaus $J = \tau \circ \rho$, joten J on bijektio. Siis jokainen Hilbertin avaruus on refleksiivinen. (Separoituvan Hilbertin avaruuden tapauksessa tämä tulos sisältyy jo esimerkkiin (2).)
(6) Jos E on refleksiivinen avaruus ja M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin M on refleksiivinen (Pettisin lause; kts. esim. Taylor, s. 192)

Transpoosi

Olkoot E ja F normiavaruuksia, joilla on skalaarikuntana $\mathbb{K}$. Olkoon $T \in \mathscr{L}(E,F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Jos funktionaali $y^* \in F^*$, niin yhdistetty kuvaus $y^* \circ T : E \to \mathbb{K}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, eli $y^* \circ T \in E^*$. Merkitään

$$T^*(y^*) := y^* \circ T, \quad y^* \in F^*.$$

Tällöin siis

$$(T^*(y^*))(x) = (y^* \circ T)(x) = y^*(Tx), \text{ eli } \langle x, T^*(y^*)\rangle = \langle Tx, y^*\rangle,$$

kun $x \in E$ ja $y^* \in F^*$. Kuvausdiagrammina tämä näyttää seuraavalta (vrt. Vektoriavaruudet, luku 12, §76).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T^*y^*"'] & & F \arrow[dl, "y^*"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Pitäen funktionaalia $y^* \in F^*$ muuttujana toteamme, että ehto $y^* \mapsto T^*(y^*)$ määrittelee kuvauksen $T^* \colon F^* \to E^*$.

9.38. **Määritelmä.** Edellä konstruoitua kuvausta $T^* \colon F^* \to E^*$ sanotaan operaattorin T (topologiseksi) *transpoosiksi* (tai *adjungaatiksi*).

9.39. **Lause.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Tällöin transpoosi $T^* \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja $\|\,T^*\,\| = \|\,T\,\|$.*

Todistus. T^* on lineaarinen: Olkoot $y^*, z^* \in F^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sekä $x \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned}\langle\, x\,,\, T^*(\alpha y^* + \beta z^*)\,\rangle &= \langle\, Tx\,,\, \alpha y^* + \beta z^*\,\rangle = \alpha\langle\, Tx\,,\, y^*\,\rangle + \beta\langle\, Tx\,,\, z^*\,\rangle \\ &= \alpha\langle\, x\,,\, T^*y^*\,\rangle + \beta\langle\, x\,,\, T^*z^*\,\rangle = \langle\, x\,,\, \alpha T^*y^* + \beta T^*z^*.\,\rangle\end{aligned}$$

Siis $T^*(\alpha y^* + \beta z^*) = \alpha T^* y^* + \beta T^* z^*$ kuvauksina $E \to \mathbb{K}$.
T^* *on jatkuva*: Olkoot $y^* \in F^*$ ja $x \in E$. Tällöin

$$|\langle\, x\,,\, T^*y^*\,\rangle| = |\langle\, Tx\,,\, y^*\,\rangle| \le \|\, y^*\,\|\|\, Tx\,\| \le \|\, T\,\|\|\, y^*\,\|\|\, x\,\|,$$

joten

$$\|\, T^*y^*\,\| = \sup_{x\in B_E} |\langle\, x\,,\, T^*y^*\,\rangle| \le \|\, T\,\|\|\, y^*\,\|, \quad y^* \in F^*.$$

Erityisesti T^* on jatkuva lineaarioperaattori $F^* \to E^*$, ja Lauseen 8.2 sivulla 125 sekä Lemman 8.9 sivulla 128 nojalla

$$\|\, T^*\,\| = \sup_{y^*\in B_{F^*}} \|\, T^*y^*\,\| \le \|\, T\,\|.$$

Toisaalta, normin duaalikaavan (Seuraus 9.21) mukaan

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \sup_{y^*\in B_{F^*}} |\langle Tx, y^*\rangle| = \sup_{y^*\in B_{F^*}} |\langle x, T^*y^*\rangle| \le \sup_{y^*\in B_{F^*}} \|T^*y^*\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\|\end{aligned}$$

kun $x \in E$. Siis $\|\, T\,\| \le \|\, T^*\,\|$, jolloin $\|\, T^*\,\| = \|\, T\,\|$. □

9.40. **Esimerkki.** Olkoon $T : \ell^1 \to c_0$ kuvaus

$$Tx = (\sum_{j=1}^\infty x_j, \sum_{j=2}^\infty x_j, \dots),$$

kun $x = (x_j) \in \ell^1$. Selvästi T on lineaarinen ja

$$\|\, Tx\,\|_\infty = \sup_n \Big|\sum_{j=n}^\infty x_j\Big| \le \sup_n \sum_{n=j}^\infty |x_j| \le \sum_{j=1}^\infty |x_j| = \|\, x\,\|_1,$$

joten $T \in \mathscr{L}(\ell^1, c_0)$. Määrätään $T^* : c_0^* \to (\ell^1)^*$. Koska $c_0^* = \ell^1$ ja $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ (vrt. HT 12:4), niin $T^*\colon \ell^1 \to \ell^\infty$. Lisäksi, kun $z^* = (z_n) \in \ell^\infty$, niin $z_k = \langle\, e_k\,,\, z^*\,\rangle$, kun $k = 1, 2, \dots$ ja $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$ (1 k:nnella paikalla).

Olkoon $x^* = (y_k) \in \ell^1$ mielivaltainen. Tällöin jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on

$$\langle\, e_k\,,\, T^*x^*\,\rangle = \langle\, Te_k\,,\, x^*\,\rangle = \sum_{j=1}^k y_j,$$

sillä $Te_k = (1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots)$ (k ykköstä alussa). Siis

$$T^*x^* = (\sum_{j=1}^n y_j)_{n\in\mathbb{N}} = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$$

kun $x^* = (y_k) \in \ell^1$.

Hilbertin avaruuksien tapauksessa on myös olemassa seuraava hyödyllinen variaatio transpoosin käsitteestä. Olkoon E Hilbertin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$. Kun $y \in E$, niin kuvaus $x \mapsto (\, Tx \mid y\,)$ määrittelee duaalin E^* alkion. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on siis olemassa yksikäsitteinen $z \in E$, jolle $(\, Tx \mid y\,) = (\, x \mid z\,)$ kaikilla $x \in E$. Määrittelemmekin kuvauksen $T^\dagger \colon E \to E$, jota nimitämme samoin myös operaattorin T *adjungaatiksi*, asettamalla $T^\dagger(y) = z$. Siis $T^\dagger$ toteuttaa ehdon

$$(x|T^\dagger y) = (Tx|y), \quad x, y \in E.$$

Tällöin $T^\dagger$ on jatkuva lineaarinen operaattori $E \to E$ ja $\|T^\dagger\| = \|T\|$ (vrt. Lause 10.2).

9.41. *Huomautus.* Huomaa erona, että jos $T \in \mathscr{L}(E)$, niin aikaisemmin funktionaalien avulla määritelty transpoosi T^* on kuvaus $E^* \to E^*$. Fréchet-Rieszin lauseen välityksellä $T^\dagger$ ja T^* kuitenkin liittyvät läheisesti toisiinsa (ja usein käytetään jopa samaa merkintää T^* molemmille käsitteille).

LOPPU / THE END 2008