7. Tasaisen rajoituksen periaate

Täydellisyydestä puristetaan maksimaalinen hyöty seuraavan *Bairen lauseen* avulla. Bairen lause on keskeinen todistettaessa kahta funktionaalianalyysin "kolmesta suuresta perustuloksesta", nimittäin *tasaisen rajoituksen periaate* (tämä luku) sekä *avoimen kuvauksen lause* (luku 8). Kolmas näistä suurista perustuloksista (*Hahn–Banachin lause*) tulee dualiteetin yhteydessä luvussa 9, ja se *ei* perustu täydellisyyteen.

Koska Bairen lauseella on paljon muitakin sovelluksia, tarkastelemme sitä yleisissä metrisissä avaruuksissa. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Palautetaan mieliin: jono $(x_n) \subset X$ on Cauchyn jono, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon, \qquad \text{aina kun } p, q \geq n_\varepsilon.$$

Aivan kuten normiavaruuksienkin tapauksessa, metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono $(x_n) \subset X$ suppenee.

Bairen lause käsittelee avoimia tiheitä osajoukkoja $V \subset X$. Esimerkkejä tällaisista ovat $V = \mathbb{R}^n \backslash [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$, kun $n \geq 2$ tai vaikkapa $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Huomautus. Osajoukko $V \subset X$ on tiheä $\iff$ $\bar{V} = X$ $\iff$ $B(x, r) \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $x \in X$, $r > 0$ $\iff$ $W \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $\emptyset \neq W \subset X$.

Seuraava topologisluonteinen lause on nk. *Bairen lause* tai *Bairen kategoria-lause*, jonka esitti ensimmäisenä *Rene Baire* (1874–1932).

7.1. **Lause** (Bairen lause). *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, on* ***numeroituva*** *kokoelma avoimia tiheitä osajoukkoja, niin*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on } \textbf{\textit{tiheä}} \text{ avaruudessa } X.$$

Erityisesti siis $\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \neq \emptyset$.

Todistus. Kts. Väisälä: Topologia II, 10.8. [*Hahmotelma*: on osoitettava, että

$$B(x, r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$.

Koska V_1 on tiheä löytyy $y_1 \in V_1 \cap B(x, r)$. Joukko $V_1 \cap B(x, r)$ on avoin, joten on olemassa sellainen $0 < r_1 < 1$, että sulkeuma $\overline{B(y_1, r_1)} \subset V_1 \cap B(x, r)$. Oletuksen nojalla V_2 on tiheä, joten löytyy $y_2 \in V_2 \cap B(y_1, r_1)$. Koska oikean-puoleinen leikkausjoukko on avoin niin on olemassa sellainen $0 < r_2 < 1/2$, että $\overline{B(y_2, r_2)} \subset V_2 \cap B(y_1, r_1)$. Jatkamalla tätä konstruktiota saamme jonon

$(y_n) \subset X$, jolle

$$\overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(y_{n-1}, r_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

missä $0 < r_n < 1/n$. Koska $y_m \in B(y_n, r_n)$ kaikilla $m \geq n$ konstruktion perustella, niin (y_n) on Cauchyn jono. Koska (X, d) on täydellinen, on siis olemassa $z = \lim_n y_n$. Tällöin rajalla myös $z \in \overline{B(y_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x, r)$ kaikilla n, joten piste $z \in B(x, r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n)$.] $\square$

Bairen lause tulee usein käyttöön seuraavassa (yhtäpitävässä) muodossa:

7.2. **Seuraus.** *Olkoon* (X, d) *täydellinen metrinen avaruus, ja*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

missä $F_n \subset X$ *on* suljettu *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$. *Silloin ainakin yksi joukoista* F_n *sisältää avoimen pallon (erityisesti* sisus $\operatorname{int}(F_n) \neq \emptyset$*).*

Todistus. Olkoon $V_n = X \setminus F_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin $V_n \subset X$ on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että millään $n \in \mathbb{N}$ joukko F_n ei sisällä avointa palloa $B(x, r)$, eli

$$V_n \cap B(x, r) \neq \emptyset \quad \text{kaikilla } x \in X \text{ ja } r > 0.$$

Siispä V_n on tiheä ja avoin jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt Bairen lause mukaan leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ on tiheä avaruudessa X. Erityisesti siis löytyy sellainen alkio $x \in X$, että

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Mutta tämä on ristiriidassa oletuksen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ kanssa. Siispä vastaoletus on väärä ja väite seuraa. $\square$

Muotoilemme aluksi ensimmäisen suurista lauseista ja todistamme sen soveltamalla Bairen lausetta.

7.3. **Lause** (Banach–Steinhausin lause eli tasaisen rajoituksen periaate)**.** *Olkoon* E *Banachin avaruus,* F *normiavaruus ja* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *kokoelma jatkuvia lineaarikuvauksia* $T_\alpha \colon E \to F$ *(tässä indeksijoukko* $J \neq \emptyset$ *on mielivaltainen). Tällöin on kaksi toisensa poissulkevaa vaihtoehtoa: joko*

(1) on olemassa sellainen luku $M < \infty$*, että*

$$\| T_\alpha \| \leq M \quad \textit{jokaisella } \alpha \in J,$$

tai

(2) on olemassa kiinteä vektori $x \in E$, jolle

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| = \infty.$$

Erityisesti, jos $M(x) := \sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty$ jokaisella $x \in E$, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha \| = \sup_{\alpha \in J} \sup_{x \in B_E} \| T_\alpha x \| < \infty.$$

Huomautus. Jos väite (1) ei toteudu, niin a priori on olemassa *vektorit* $x_\alpha \in E$ $(\alpha \in J)$, joille $\| x_\alpha \| = 1$ ja $\sup_\alpha \| T_\alpha x_\alpha \| = \infty$. Väite (2) sanookin, että voidaan valita *yksi* ja *sama* vektori $x \in E$ kaikilla $\alpha \in J$.

Ennen kuin todistamme Banach–Steinhausin lauseen, tarkastelemme hieman sen käyttöä.

Ensimmäisenä tasaisen rajoituksen periaatteen sovelluksena osoitamme vahvan parannuksen pisteittäisen rajaoperaattorin jatkuvuudelle (katso Esimerkki 6.5 sivulla 105 ja Lause 6.6 sivulla 106).

7.4. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $(T_n) \subset \mathscr{L}(E, F)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$ on olemassa kaikilla $x \in E$. Tällöin $T \in \mathscr{L}(E, F)$, eli T on jatkuva lineaarikuvaus.*

Todistus. Kuvaus T on lineaarinen Lauseen 6.2 sivulla 104 nojalla. Oletuksen mukaan jono $(T_n x)$ suppenee avaruudessa F jokaisella $x \in E$. Siispä jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono ja edelleen Lauseen 3.3 sivulla 29 mukaan rajoitettu. Siispä

$$M(x) \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n x \| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Nyt Banach–Steinhausin Lauseen 7.3 nojalla löytyy sellainen $M < \infty$, että $\| T_n \| \le M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Saadaan

$$\| Tx \| = \lim_{n \to \infty} \| T_n x \| \le \sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n \| \cdot \| x \| \le M \| x \|$$

kun $x \in E$, joten $\| T \| \le M$. □

Lähtöavaruuden täydellisyys on edellä olennainen ehto:

7.5. **Esimerkki.** Esimerkin 6.3 sivulla 104 mukaisessa tilanteessa

$$\mathcal{P} = \{ \, x : \; x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \, \}, \quad \| x \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

$$T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big), \quad \text{kun } x \in \mathcal{P},$$

Esimerkissä 6.3 näytettiin, että $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ja $T_n x \to Tx$ kun $n \to \infty$, missä $Tx = x'(1)$, kun $x \in \mathcal{P}$ on polynomi. Mutta, tällöin $T \notin \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ei ole jatkuva. Johtopäätökset:

i) $(\mathcal{P}, \| \cdot \|)$ ei ole täydellinen (suora tapa harjoituksissa) *ii*) Oletus, että E Banachin avaruus on *olennainen* Lauseessa 7.4.

Koska olemme saaneet jo hieman esimakua Banach–Steinhausin lauseen tehokkuudesta ja voimasta, niin siirrymme lauseen todistukseen.

Banach–Steinhausin lauseen todistus. Olkoon

$$F(n,\alpha) := \{\, x \in E : \ \|\, T_\alpha x \,\| \le n \,\},$$

kun $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f_\alpha \colon x \mapsto \|\, T_\alpha x \,\|$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva. Siispä $F(n,\alpha) = f_\alpha^{-1}([-n,n]) \subset E$ on suljettu joukko jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$, sillä joukko $[-n,n] \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja f_α on jatkuva. Tällöin myös leikkausjoukko

$$F_n := \bigcap_{\alpha \in J} F(n,\alpha) \subset E \text{ on suljettu,}$$

sillä mielivaltainen leikkaus suljetuista joukoista on edelleen suljettu.

Oletetaan nyt, että vaihtoehto (2) *ei* päde. Väitteen todistamiseksi on siis osoitettava, että tällöin vaihtoehto (1) on välttämättä voimassa.

Olkoon tätä varten $x \in E$ mielivaltainen. Koska oletimme, että vaihtoehto (2) ei päde, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \|\, T_\alpha x \,\| < \infty.$$

Siten löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että

$$\sup_{\alpha \in J} \|\, T_\alpha x \,\| \le n.$$

Siispä $x \in F(n,\alpha)$ jokaisella $\alpha \in J$ eli $x \in F_n$. Tästä seuraa heti, että

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Koska E on Banachin avaruus, niin Seurauksen 7.2 nojalla löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$ ja sellainen avoin pallo $B(x_0, r_0)$, että

$$B(x_0, r_0) \subset F_N. \tag{7.6}$$

Osoitamme seuraavaksi, että ehdosta (7.6) seuraa, että $\|\, T_\alpha x \,\| \le 2N/r_0$ jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $x \in B_E$. Olkoon $x \in E$ ja $\|\, x \,\| < 1$. Tällöin $x_0 + r_0 x \in B(x_0, r_0)$, joten $\|\, T_\alpha(x_0 + r_0 x) \,\| \le N$. Siispä

$$\begin{aligned}
\|\, T_\alpha x \,\| &= \frac{1}{r_0} \|\, T_\alpha(r_0 x) \,\| = \frac{1}{r_0} \|\, T_\alpha(x_0 + r_0 x) - T_\alpha(x_0) \,\| \\
&\le \frac{1}{r_0} \big(\|\, T_\alpha(x_0 + r_0 x) \,\| + \|\, T_\alpha(x_0) \,\| \big) \le \frac{2N}{r_0} =: M
\end{aligned}$$

Siis $\|\, T_\alpha \,\| \le M$ jokaisella $\alpha \in J$. $\square$

7.7. **Esimerkki.** Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sellainen lukujono, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee avaruudessa } \mathbb{R} \textit{ kaikilla } x = (x_k) \in \ell^1. \tag{7.8}$$

Havaitaan, että jos $(a_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono, niin (7.8) toteutuu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|x_k| \le \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \text{kun} \quad x = (x_k) \in \ell^1.$$

Siispä sarja $\sum a_k x_k$ suppenee (jopa itseisesti), kun $x = (x_k) \in \ell^1$. Herää kysymys, onko olemassa muita lukujonoja (a_k), joille (7.8) on voimassa?

Osoitamme käänteisen suunnan eli jos lukujono (a_k) toteuttaa ehdon (7.8), niin $(a_k) \in \ell^\infty$. (Tämä esimerkki liittyy läheisesti luvun 9 duaalisuusteoriaan.)

Todistus. Asetetaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \text{kun} \quad x = (x_k) \in \ell^1.$$

Tällöin f_n on lineaarinen $\ell^1 \to \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|\,|x_j| \le \max_{k=1,\dots,n} |a_k| \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ &\le \max_{k=1,\dots,n} |a_k| \cdot \| x \|_1 < \infty \end{aligned}$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis f_n on jatkuva $\ell^1 \to \mathbb{R}$ kaikilla n. Oletuksen (7.8) nojalla on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j =: f(x)$$

kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$. Koska ℓ^1 on Banachin avaruus, niin Lauseen 7.4 perusteella lineaarinen operaattori $f \in \mathscr{L}(\ell^1, \mathbb{R})$ on jatkuva. On siis olemassa $M < \infty$, jolle

$$|f(x)| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j| \le M \| x \|_1 \quad \text{kaikilla } x = (x_k) \in \ell^1.$$

Sijoitetamalla vektorit

$$e_k = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k:nnes}, 0, 0, \dots) \in \ell^1, \quad k \in \mathbb{N},$$

funktionaaliin f havaitaan, että

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = \sup_k |f(e_k)| \le \sup_k M \| e_k \|_1 = M,$$

joten $(a_k) \in \ell^\infty$. $\square$

Banach–Steinhausin lauseen sovelluksia Fourier-sarjoihin

Muistamme, että C^1-funktioille Fourier-sarja suppenee pisteittäin ja jokaisella L^2-funktiolla Fourier-sarja suppenee ainakin L^2-normin mielessä. Lisäksi Fejérin lauseen 5.4 nojalla jatkuvalla funktiolla f Fourier-osasummien *keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f:ää. Edellisten tietojen valossa seuraava tulos on yllättävä (tämä Banach–Steinhausin lauseen sovellus oli ainakin yllätys löytöaikanaan):

7.9. **Lause.** *On olemassa* jatkuva 2π*-jaksollinen funktio* $f \in C(0,2\pi)$*, jonka Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

hajaantuu *pisteessä* $x = 0$*.*

Todistus. Olkoon

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Näytämme, että on olemassa sellainen jatkuva funktio $f \in C(0,2\pi)$, jolla $f(0) = f(2\pi)$ ja

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f;0)| = \infty,$$

mistä erityisesti seuraa, että funktion f Fourier-sarja hajaantuu, kun $x = 0$. Edelleen tästä seuraa, että $S_n(f;0) \not\to f(0)$, kun $n \to \infty$. Tähän tarvitaan luvun 5 tietoja. Lemman 5.2 sivulla 79 mukaan

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = (D_n * f)(x),$$

missä D_n on Dirichlet'n ydin

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{x}{2})}. \tag{7.10}$$

Asetetaan

$$\Lambda_n(f) = S_n(f;0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k).$$

Tällöin kuvaus Λ_n on lineaarinen $C(0,2\pi) \to \mathbb{R}$, ja

$$\begin{aligned}|\Lambda_n(f)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(t)D_n(-t)\,\mathrm{d}t\Big| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)||D_n(-t)|\,\mathrm{d}t \\ &\overset{D_n(-t)=D_n(t)}{\le} \frac{\| f \|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

kun $f \in C(0,2\pi)$, joten $\| \Lambda_n \| \le (2\pi)^{-1} \| D_n \|_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoitamme, että edellinen arvio on itse asiassa yhtäsuuruus, eli että

$$\| \Lambda_n \| \ge \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Lisäksi osoitamme, että

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n \|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t = \infty, \tag{7.12}$$

mikä yhdessä kaavan $\| \Lambda \|_n = (2\pi)^{-1} \| D_n \|_1$ ja tasaisen rajoituksen periaatteen kanssa osoittaa väitteen, kuten tulemme pian huomaamaan. Osoitetaan ensin jälkimmäinen raja-väite (7.12), sillä sen argumentti on suoraviivaisempi. Ideana on soveltaa hyvin tunnettua arviota $|\sin(\frac{t}{2})| < \frac{t}{2} < t$, joka on voimassa kaikilla $t > 0$, esitykseen (7.10). Suoraan arvioimalla ja muuttujanvaihdon avulla saamme silloin

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t &\ge \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} \, \mathrm{d}t \ge \int_0^{\pi} |\sin((n+\tfrac{1}{2})t)| \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin s| \frac{\mathrm{d}s}{s} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Edellä tunnetusti $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t = 2$ kaikilla k.

Osoitamme nyt epäyhtälön (7.11). Olkoon g_n funktio

$$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } D_n(-t) \ge 0 \\ -1, & \text{kun } D_n(-t) < 0 \end{cases}$$

jolloin siis $g_n(t) D_n(-t) = |D_n(-t)|$ kun $t \in [0,2\pi]$. Tällöin on olemassa jono *jatkuvia* 2π-periodisia funktioita $(f_j) \subset C(0,2\pi)$, joille

$$-1 \le f_j(t) \le 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j\to\infty} f_j(t) = g_n(t) \text{ pisteittäin.}$$

Tämä nähdään vertaamalla Lauseen 5.6 todistukseen tai tekemällä suora päättely. (Itse asiassa, $g_n = \chi_F - \chi_{F^c}$, missä funktion D_n jatkuvuuden nojalla joukko $F = \{t \in [0,2\pi] : D_n(-t) \ge 0\}$ on suljettu. Haluttu funktiojono (f_j) on konstruoitu Lauseen 5.6 osissa (1) ja (2).)

tähän tulee kuva!!

Koska $\| f_j \|_\infty \leq 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla, kun majoranttina käytetään funktiota $|D_n| \in L^1$, saadaan

$$\begin{aligned}\| \Lambda_n \| &\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_n(f_j) \geq \lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)D_n(-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n(t)D_n(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(-t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Siis epäyhtälö (7.11) pätee, ja siten $\| \Lambda_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehto (2) jää jäljelle, koska suljimme juuri vaihtoehdon (1) pois. Siten on olemassa sellainen jatkuva $f \in C(0, 2\pi)$, jolle

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f; 0)| = \infty,$$

mikä osoittaa väitteen. $\square$

Lisätietoja Fourier-sarjoista: - Du-Bois–Reymond (1876): *konkreettinen* jatkuva 2π -periodinen f, jonka vastaava Fourier-sarja $\sum \widehat{f}(k)e^{ikx}$ hajaantuu pisteessä $x = 0$ (kts. [Körner: Fourier Analysis, luku 18]).

- Banach ja Steinhaus (1927): Lauseen 7.9 *ei-konstruktiivinen* esimerkki.
- Kolmogorov (1926): on olemassa sellainen integroituva $f \in L^1(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja hajaantuu *joka* pisteessä $x \in [0, 2\pi]$!

Muistamme, että jos $f \in L^2$, niin funktion f Fourier-sarja suppenee L^2-normin mielessä. Onko sama voimassa funktioille avaruudessa L^1 ?? Vastaamme tähän myös Banach–Steinhausin lauseen avulla negatiivisesti.

7.13. **Lause.** *On olemassa sellainen $f \in L^1(0, 2\pi)$, että*

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \Big\|_{L^1} \not\to 0, \quad \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Määritellään $T_n \colon L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ asettamalla

$$(T_n f)(x) = S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx},$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$, $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Selvästi T_n on lineaarinen, koska $f \mapsto \widehat{f}(k)$ on lineaarinen kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Suoraan laskemalla saamme yksinkertaisen arvion funktion f Fourier-kertoimille

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)||e^{ikt}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\| f \|_1,$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Tästä saamme trigonometrisen polynomin $T_n f$ L^1-normille arvion

$$\| T_n f \|_1 = \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big\|_1 \leq \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)| \, \| e^{ikx} \|_{L^1} \leq (2n+1) \| f \|_1$$

kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten $T_n \colon L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Väitteen osoittamiseksi teemme vastaoletuksen, eli oletamme että kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$ pätee

$$\lim_{n \to \infty} \| T_n f - f \|_1 = 0.$$

Tällöin jono $(T_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten $\sup_n \| T_n f \|_1 < \infty$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehdon (1) mukaan $\| T_n \| \leq M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Luvun 5 nojalla Fejérin ydin on

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} D_k(x).$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinteä. Tiedämme sivulla 79 olevan Lemman 5.3 sekä Fejérin Lauseen 5.4 (sivulla 81) perusteella, että $T_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \to D_n$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$ kun $j \to \infty$ (tässä Fejérin lause on sovellettu jatkuvaan funktioon D_n). Koska lisäksi $K_j \geq 0$ ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j(t) \, \mathrm{d}t = 1,$$

niin $(2\pi)^{-1} \| K_j \|_1 = 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$, ja siis

$$2\pi \| T_n \| \geq \sup_j \| T_n(K_j) \|_{L^1} \geq \lim_{j \to \infty} \| T_n(K_j) \|_{L^1} = \| D_n \|.$$

Edellisen Lauseen 7.9 todistuksen mukaan $\| D_n \|_1 \to \infty$, joten $\| T_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$, mikä on ristiriita. Näin $S_n(f; x)$ ei suppene kohti funktiota f normin mielessa avaruudessa L^1 jollakin $f \in L^1(0, 2\pi)$.
(*Vahvempi* tieto: Banach-Steinhausin lauseen vaihtoehdon (2) mukaan on jopa olemassa $f \in L^1(0, 2\pi)$, jolle $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| T_n(f) \|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \| S_n(f; \cdot) \|_1 = \infty$). □

Edellinen Lause 7.13 (sekä toki Kolmogorovin em. tulos vuodelta 1926) näyttää, että Fourier-sarjojen yhteydessä avaruus L^1 poikkeaa huomattavasti avaruudesta L^2. Herää kysymys, miten muut L^p-avaruudet käyttäytyvät ? Voidaan todistaa (mutta todistukset sivuutetaan tällä kurssilla), soveltamalla joko funktioteoriaa tai nk. *singulaarisia integraaleja*, että jos $1 < p < \infty$, niin funktion $f \in L^p(0, 2\pi)$ Fourier-sarja suppenee L^p-normissa kohti funktiota f, eli

$$\|f - S_n(f, \cdot)\|_p \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

kaikilla $f \in L^p(0, 2\pi)$.

Pisteittäisestä suppenemisesta tiedetään, että jos $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p(0, 2\pi)$, niin Fourierin osasummille pätee

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{m.k. } x \in [0, 2\pi].$$

Tämä tulos on syvällinen *Carlesonin–Huntin* lause 6o-luvulta.