6. Lineaariset operaattorit

Luvussa 5 osoitimme, että jos $f \in L^2$, niin vastaavan Fourier-sarjan osasummat suppenevat kohti f:ää L^2-normissa (kts. Seuraus 5.8 sivulla 85). Osoitimme myös, että kun f on jatkuva ja 2π-periodinen funktio, niin Fourier-osasummien *aritmeettiset keskiarvot* suppenevat tasaisesti kohti funktiota f (kts. Fejérin lause 5.4 sivulla 81). Koska nälkä vain kasvaa syödessä, niin voimme miettiä uusia luontevia Fourier-sarjoihin liittyviä kysymyksiä:

Kysymys 1: Suppeneeko Fourier-sarja L^1-normissa, jos f on L^1-funktio ?

Kysymys 2: Suppeneeko jatkuvan funktion Fourier-sarja pisteittäin ? Eli jos $f \in C(0, 2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$, onko

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} S_n(f; x) \text{ kaikilla } x?$$

Näiden kysymysten ratkaisemiseksi meidän on tutkittava Fourier-osasummien $S_n(f;\,\cdot\,)$ ominaisuuksia lineaarisena operaattorina $f \mapsto S_n(f;\,\cdot\,)$. Itse asiassa, jatkuvan lineaarikuvauksen käsite on funktionaalianalyysin keskeisiä peruskäsitteitä. Palautetaan lyhyesti mieleen kurssin alkupuolella jo esitellyt lineaariset operaattorit.

Olkoon E ja F vektoriavaruuksia. Kuvaus $T\colon E \to F$ on *lineaarinen*, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

kun $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Lineaarisesta kuvauksesta käytetään usein nimitystä *lineaarinen operaattori*; näin erityisesti siinä tapauksessa, että T on jatkuva.

Luvussa 2 käsittelimme jo lineaaristen operaattoreiden jatkuvuutta (kts. Määritelmä 2.24 sivulla 22 ja Lause 2.30 sivulla 24). Lisäksi osoitimme, että lineaarikuvaus T on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi $\|\,T\,\|$ on äärellinen. Lineaarikuvauksen $T\colon E \to F$ operaattorinormihan määriteltiin

$$\|\,T\,\| = \sup_{x\in B_E} \|\,Tx\,\|_F,$$

missä $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ on avaruuden E suljettu yksikköpallo.

Nyt ryhdymme tarkastelemaan operaattoreiden itsensä muodostamia avaruuksia. Tätä varten otamme käyttöön muutaman uuden merkinnän. Olkoon E ja F normiavaruuksia. Asetamme

$$L(E,F) = \{T\colon E \to F | T \text{ on lineaarikuvaus}\},$$

$$\mathscr{L}(E,F) = \{T\colon E \to F | T \text{ on jatkuva lineaarikuvaus}\},$$

ja erityisesti, kun $F = E$, merkitsemme $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$. Nyt osoittautuu, että jatkuvat lineaariset operaattorit muodostavat normiavaruuden, kun normiksi valitaan operaattorinormi.

6.1. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Tällöin $\mathscr{L}(E,F)$ on $\mathbb{K}$-kertoiminen normiavaruus, jossa normina on operaattorinormi*

$$T \mapsto \| T \| := \sup\{ \| Tx \|_F : \ x \in E, \| x \|_E \leq 1 \}.$$

Todistus. Jos $S, T \in L(E,F)$, niin vastaava summaoperaattori on

$$(S+T)(x) = Sx + Tx, \quad x \in E.$$

Kuvaus $V = S+T$ on lineaarinen kuvaus $E \to F$, sillä jos $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} V(\alpha x + \beta y) &= S(\alpha x + \beta y) + T(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha Sx + \beta Sy + \alpha Tx + \beta Ty \\ &= \alpha(Sx + Tx) + \beta(Sy + Ty) \\ &= \alpha V(x) + \beta V(y) \end{aligned}$$

Samoin kuvaus cS on lineaarinen $E \to F$, kun $(cS)(x) = cSx$, $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Toteamme siis, että $L(E,F)$ on vektoriavaruus, kun nolla-alkiona on nollakuvaus $\bar{0}(x) = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$.

Näytämme seuraavaksi, että $\mathscr{L}(E,F)$ on avaruuden $L(E,F)$ vektorialiavaruus ja kuvaus $T \mapsto \| T \|$ on normi vektoriavaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$. Tämän näyttämiseksi käydään läpi normin aksiomat:
(N1) Olkoon $S, T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $x \in B_E = \{x \in E : \| x \| \leq 1\}$. Tällöin soveltamalla kolmioepäyhtälöä avaruudessa F saadaan, että

$$\| (S+T)x \|_F = \| Sx + Tx \|_F \leq \| Sx \|_F + \| Tx \|_F \leq \| S \| + \| T \|$$

sillä $\| x \| \leq 1$. Siis

$$\| S + T \| = \sup_{x \in B_E} \| (S+T)x \|_F \leq \| S \| + \| T \|.$$

Erityisesti, operaattori $S + T$ on jatkuva, eli $S + T \in \mathscr{L}(E,F)$.
(N2) Olkoon $c \in \mathbb{K}$ ja $x \in B_E$. Tällöin $\| cTx \|_F = |c| \| Tx \|_F$, joten

$$\begin{aligned} \| cT \| &= \sup\{ \| cTx \|_F : \ x \in B_E \} = |c| \sup\{ \| Tx \|_F : \ x \in B_E \} \\ &= |c| \, \| T \| \end{aligned}$$

Erityisesti $cT \in \mathscr{L}(E,F)$. Nyt yhdessä edellisen kohdan (N1) kanssa tästä seuraa, että $\mathscr{L}(E,F)$ on vektoriavaruuden $L(E,F)$ vektorialiavaruus.
(N3) Operaattorinormin positiivisuus on selvä. Jos $\| T \| = 0$, niin $\| Tx \|_F = 0$ kaikilla $x \in E$ eli $Tx = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$. Siispä $T = \bar{0}$, missä $\bar{0}$ on nollaoperaattori, joka on avaruuden $L(E,F)$ nolla-alkio. Käänteinen suunta on selvä.

Siispä $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|)$ on normiavaruus. $\square$

Tutkimme seuraavaksi, milloin avaruus $\mathscr{L}(E,F)$ on Banachin avaruus eli täydellinen operaattorinormissa. Tätä varten meidän on pohdittava hiukan erilaisia operaattoreihin liittyviä suppenemiskäsitteitä. Koska lineaariset operaattorit ovat kuvauksia, voimme puhua niiden pisteittäisestä suppenemisesta. Siis jos E ja F normiavaruuksia ja $A \subset E$ osajoukko, niin sanomme että jono (f_n) kuvauksia $f_n\colon A \to F$ *suppenee pisteittäin* joukossa A kohti kuvausta $f : A \to F$, jos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Havaitsemme, että pisteittäinen suppeneminen säilyttää lineaarisuuden eli lineaaristen kuvausten pisteittäinen raja on myös lineaarinen kuvaus.

6.2. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n) \subset L(E,F)$ jono lineaarikuvauksia, jotka suppenevat pisteittäin E:ssä kohti kuvausta $T\colon E \to F$. Tällöin $T \in L(E,F)$.*

Todistus. Suoraan laskemalla

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n x + \mu T_n y) \\ &= \lambda T x + \mu T y. \end{aligned}$$

$\square$

Seuraavaksi herää kysymys, säilyykö lineaarisen kuvauksen jatkuvuuskin pisteittäisessä suppenemisessa ? Vastaus on yleisessä tapauksessa kielteinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

6.3. **Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{P} = \{\, x : \ x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \,\}$ ja $\|\, x \,\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1}|x(t)|$, kun $x \in \mathcal{P}$. Määrittemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvauksen

$$T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big).$$

Tällöin $T_n : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen ja $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$, sillä $|x(1)|, |x(1-\frac{1}{n})| \le \|\, x \,\|_\infty$, joten $\|\, T_n x \,\| \le 2n\|\, x \,\|_\infty$. Siispä $\|\, T_n \,\| \le 2n$. Toisaalta

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1) - x(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = x'(1),$$

joten jono (T_n) suppenee *pisteittäin* kohti kuvausta $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, missä $x \mapsto x'(1)$. Kuitenkaan kuvaus T ei ole jatkuva: jos $x_n(t) = t^n$, niin $\|\, x_n \,\|_\infty = 1$ ja

$$|Tx_n| = |x_n'(1)| = n, \text{ joten } \|\, T \,\| \ge \sup_n |Tx_n| = \infty.$$

Siis normiavaruuden jatkuvien lineaarikuvausten pisteittäinen raja ei välttämättä olekaan jatkuva. (Ehkä yllättäen, täydellisyys pelastaa tilanteen, kuten tulemme näkemään luvussa 7 käyttämällä tasaisen rajoituksen periaatetta.)

Palaamme nyt lyhyen pisteittäisen suppenemisen tarkastelun jälkeen operaattorinormin määräämään suppenemiseen.

6.4. **Määritelmä.** Jos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(E,F)$ ja $T \in \mathscr{L}(E,F)$, niin sanomme, että jono (T_n) suppenee kohti operaattoria T *operaattorinormin mielessä* (eli *tasaisesti*), jos

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0.$$

Tällöin merkitsemme $T_n \to T$ kun $n \to \infty$, tai $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Huomautus. Jos $T_n \to T$ operattorinormin mielessä kun $n \to \infty$, niin T_n suppenee myös pisteittäin kohti operaattoria T, sillä kaikilla $x \in E$ pätee

$$\| T_n x - Tx \| = \| (T_n - T)x \| \leq \| T_n - T \| \| x \| \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

Käänteinen väite ei kuitenkaan pidä paikkaansa.

6.5. **Esimerkki.** Määrittelemme lineaarikuvaukset $T_n \colon \ell^1 \to \ell^1$ asettaen

$$T_n x = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\| T_n x \|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \leq \sum_{k=0}^\infty |x_k| = \| x \|_1,$$

kun $x \in \ell^1$, joten kuvaukset T_n ovat jatkuvia ja $\| T_n \| \leq 1$. Edelleen, $T_n(x) \to \bar{0}$ kaikilla $x \in \ell^1$ eli $T_n \to \bar{0}$ pisteittäin (nimittäin: $\|T_n x\|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \to 0$ kun $n \to \infty$ kaikilla $x = (x_k) \in \ell^1$).

Kuitenkaan jono (T_n) ei suppene operaattorinormin mielessä kohti nollaoperaattoria: Jos

$$e_n = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^1,$$

niin $T_n e_n = e_n$ ja siis $\| T e_n \|_1 = \| e_n \|_1 = 1$, joten $\| T_n \| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olemme jo todenneet, että jatkuvien lineaaristen operaattoreiden pisteittäinen suppeneminen ei takaa jatkuvuutta. Suppeneminen normin suhteen muuttaa tilanteen, kuten seuraava tulos osoittaa. Lisäksi, seuraavan keskeisen tuloksen avulla voimme rakentaa uusia Banachin avaruuksia lähtien tunnetuista avaruuksista.

6.6. **Lause.** *Jos E on normiavaruus ja F on Banachin avaruus, niin $\mathscr{L}(E,F)$ on Banachin avaruus varustettuna operaattorinormilla $\|\cdot\|$.*

Todistus. Olkoon (T_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$ ja $x \in E$. Tällöin

$$\| T_n x - T_m x \| = \| (T_n - T_m)x \| \leq \| T_n - T_m \| \, \| x \|,$$

kun $n, m \in \mathbb{N}$, joten jono $(T_n x)$ on Cauchy avaruudessa F. Koska F on täydellinen, niin jono $(T_n x)$ suppenee ja merkitään tätä rajaa

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Siispä jono (T_n) suppenee kohti kuvausta T pisteittäin, joten Lauseen 6.2 sivulla 104 nojalla T on lineaarikuvaus $E \to F$.
Väite. $T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $\|T - T_n\| \to 0$ kun $n \to \infty$.
Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (T_n) on Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että aina kun $n, m \geq n_0$, niin $\| T_n - T_m \| \leq \varepsilon$. Jos $x \in E$ ja $\| x \| \leq 1$, niin silloin

$$\| T_n x - T_m x \|_F = \| (T_n - T_m)x \|_F \leq \| T_n - T_m \| \, \| x \|_E \leq \| T_n - T_m \| \leq \varepsilon.$$

Pitämällä piste $x \in E$ ja luku $n \in \mathbb{N}$ kiinteinä ja antamalla luvun m kasvaa rajatta tästä seuraa, että

$$\| T_n x - Tx \|_F = \lim_{m\to\infty} \| T_n x - T_m x \|_F \leq \varepsilon,$$

ja siis $\| (T_n - T)x \|_F \leq \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_0$ ja $x \in B_E$. Näin ollen kuvaus $T_{n_0} - T$ on jatkuva, joten myös

$$T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T)$$

on jatkuva. Operaattorinormin määritelmän ja viimeisimmän arvion nojalla

$$\| T_n - T \| \leq \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$, joten jono (T_n) siis suppenee avaruudessa $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|)$. Siispä $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|)$ on täydellinen. □

Operaattorien avaruuksissa on myös algebrallista rakennetta, sillä voimme määritellä operaattoritulon yhdistettynä kuvauksina. Seuraava lause sanoo saman formaalimmin.

6.7. **Lause.** *Olkoot E, F ja G normiavaruuksia. Olkoot $T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $S \in \mathscr{L}(F,G)$ rajoitettuja lineaarisia operaattoreita. Silloin yhdistetty kuvaus $ST = S \circ T \in \mathscr{L}(E,G)$ ja*

$$\| ST \| \leq \| S \| \, \| T \|$$

(siis operattorinormi on submultiplikatiivinen).

Todistus. Jatkuvien kuvausten yhdiste on jatkuva ja myös lineaaristen kuvausten yhdiste on lineaarinen. Siispä $ST \in \mathscr{L}(E,G)$. Jos $x \in E$ ja $\| x \| \leq 1$, niin

$$\| STx \|_G = \| S(Tx) \|_G \leq \| S \| \, \| Tx \|_F \leq \| S \| \, \| T \|$$

ja siis $\| ST \| \leq \| S \| \, \| T \|$. □

Huomautus. Banachin avaruutta E sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden E alkioille on määritelty tulo $E \times E \to E$; $(x,y) \mapsto xy$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\| xy \| \leq \| x \| \, \| y \|, \quad \forall x, y \in E,$$

sekä lisäksi *algebran* ehdot: (seuraavassa $x, y, z \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, \quad \text{(tulon assosiatiivisuus)},\\ x(y+z) &= xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad \text{(osittelulait) ja}\\ (\lambda x)y = \lambda(xy) &= x(\lambda y), \quad \text{(skaalarilla kertomisen ja tulon yhteys)} \end{aligned}$$

6.8. **Esimerkki.** (1) Lauseiden 6.6 ja 6.7 nojalla $\mathscr{L}(E)$ on Banachin algebra, kun E on Banachin avaruus, normina on operaattorinormi ja tulona ST on kuvausten yhdistäminen.
(2) Jos X on kompakti avaruus, niin $C(X)$ on Banachin algebra, kun normina on $\| \cdot \|_\infty$ ja tulona $(fg)(x) = f(x)g(x), x \in X$.

6.9. **Lause.** *Olkoon E, F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on lineaarinen ja*

(6.10) $\quad T^{-1}$ *jatkuva* $\iff$ *on olemassa* $\alpha > 0$, *jolle* $\| Tx \| \geq \alpha \| x \|,\ x \in E$

(eli lineaarikuvaus T on alhaalta rajoitettu).

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, niin

$$T(\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y) = \lambda TT^{-1}x + \mu TT^{-1}y = \lambda x + \mu y = T\big(T^{-1}(\lambda x + \mu y)\big).$$

Koska T on bijektio, niin tästä seuraa, että $\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y = T^{-1}(\lambda x + \mu y)$. Siispä T^{-1} on lineaarinen. Osoitetaan seuraavaksi (6.10).

"⇒": Koska $T^{-1}x = \bar{0}$ joss $x = \bar{0}$, niin voidaan olettaa $E \neq \{\bar{0}\}$ ja $F \neq \{0\}$. Tällöin on siis olemassa $x_0 \in F$, $x_0 \neq 0$, jolloin

$$0 < \frac{\| T^{-1}x_0 \|}{\| x_0 \|} \leq \| T^{-1} \|.$$

Siispä $0 < \| T^{-1} \| < \infty$, joten luku $1/\| T^{-1} \|$ on hyvin määritelty. Jos $x \in E$ on mielivaltainen, niin $\| x \| = \| T^{-1}Tx \| \leq \| T^{-1} \| \| Tx \|$, joten

$$\Big(\frac{1}{\| T^{-1} \|}\Big) \cdot \|x\| \leq \| Tx \|, \quad x \in E.$$

Voidaan siis valita $\alpha = \| T^{-1} \|^{-1}$, josta seuraa väitteen tämä suunta.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\| Tx \| \geq \alpha \| x \|$ kaikilla $x \in E$. Jos $y \in F$ on mielivaltainen, niin olkoon $x = T^{-1}y$. Silloin $Tx = y$ ja oletuksen perusteella

$$\| T^{-1}y \| = \| x \| \leq \frac{1}{\alpha} \| Tx \| = \frac{1}{\alpha} \| y \|,$$

joka on voimassa kaikilla $y \in F$. Siispä $\| T^{-1} \| \leq 1/\alpha < \infty$ (eli T^{-1} on jatkuva).

□

6.11. **Seuraus.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarinen bijektio. Silloin T on homeomorfismi jos ja vain jos on olemassa sellaiset vakiot $\alpha, \beta > 0$, joille*

$$\alpha \| x \| \leq \| Tx \| \leq \beta \| x \| \tag{6.12}$$

kaikilla $x \in E$.

Todistus. Tämä seuraa välittömästi Lauseesta 2.30 sivulla 24 ja Lauseesta 6.9.

□

6.13. *Huomautus.* Jos $T \in \mathscr{L}(E, F)$ toteuttaa Seurauksen 6.11 ehdot (6.12), niin sanomme, että T on lineaarinen *isomorfismi* ja että avaruudet E ja F ovat isomorfiset.

6.14. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T \in \mathscr{L}(E, F)$ isomorfismi. Silloin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.*

Todistus. Symmetrian mukaan riittää osoittaa väite vain toiseen suuntaan. Oletetaan siis, että E on täydellinen. Olkoon $(x_n)_{n \in N}$ Cauchyn jono avaruudessa F. Silloin

$$\| T^{-1}x_n - T^{-1}x_m \| \leq \| T^{-1} \| \, \| x_n - x_m \|, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

ja siis $(T^{-1}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa E. Koska E on täydellinen, niin $T^{-1}x_n \to y \in E$ kun $n \to \infty$, ja

$$\| x_n - Ty \| = \| T(T^{-1}x_n) - Ty \| \leq \| T \| \, \| T^{-1}x_n - y \| \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Täten myös F on täydellinen. □

Jos normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ ovat ekvivalentteja E:ssä (kts. Määritelmä 2.11 sivulla 14), niin Lauseen 6.14 nojalla $(E, \| \cdot \|_1)$ on täydellinen jos ja vain jos $(E, \| \cdot \|_2)$ on täydellinen.

6.15. **Esimerkki.** (a) Jos $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p$ ja χ_I on välin I karakteristinen funktio, niin kuvaus

$$T\colon (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \chi_{[n, n+1)}(x)$$

määrää isomorfismin $T\colon \ell^p \to E$, missä $E = \overline{span}\{\chi_{[n,n+1)} : n \in \mathbb{Z}\}$ on avaruuden $L^p(\mathbb{R})$ suljettu aliavaruus. Itse asiassa, T on *isometria* eli $\| Tx \|_{L^p(\mathbb{R})} = \| x \|_{\ell^p}$, koska

$$\int_{\mathbb{R}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \chi_{[n,n+1)}(x)|^p \,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p.$$

(b) Osoitamme, että jonoavaruus $c = \{(x_n) : \lim_n x_n \text{ olemassa}\}$ on isomorfinen avaruuden c_0 kanssa (molemmissa sup-normi $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$).

Jos $x = (x_n) \in c$, niin merkitään $\ell(x) = \lim_n x_n$. Määritellään $T : c \to c_0$ asettamalla $T(x_n) = (y_n)$, missä $y_1 = \ell(x)$ ja $y_n = x_{n-1} - \ell(x)$ kun $n \geq 2$. Tällöin $T(x_n) \in c_0$ ja T on lineaarinen kuvaus $c \to c_0$ (tarkista!). Lisäksi

$$\|Tx\|_\infty \leq \sup_n |x_n| + |\ell(x)| \leq 2\|x\|_\infty,$$

joten T on jatkuva (ja $\|T\| \leq 2$). Määritellään seuraavaksi $S : c_0 \to c$ ehdolla $S(x_n) = (x_{n+1} + x_1)_{n\in\mathbb{N}}$ kun $(x_n) \in c_0$. Tällöin S on lineaarikuvaus $c_0 \to c$, ja

$$\|Sx\|_\infty = \sup_n |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|x\|_\infty,$$

eli myös $\|S\| \leq 2$. Lisäksi $T \circ S = id_{c_0}$ ja $S \circ T = id_c$, joten T on bijektio (ja $S = T^{-1}$). Nimittäin,

$$T(S(x_n)) = T((x_{n+1} + x_1)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_1, x_2 + x_1 - x_1, x_3 + x_1 - x_1, \ldots) = (x_n)$$

kaikilla $(x_n) \in c_0$. Yhtälö $S \circ T = id_c$ todetaan samoin.

(c) [*Lisätietoja*] Jos $p \neq q$, niin ℓ^p ei ole isomorfinen avaruuden ℓ^q kanssa (todistus sivuutetaan). Samoin avaruus L^p on isomorfinen avaruuden L^q kanssa $\iff p = q$. Jonoavaruus ℓ^2 on isomorfinen erään avaruuden L^q suljetun aliavaruuden kanssa, jos $q \geq 2$. Mutta jos $q < 2$, niin tämä ei päde. Näiden todistukset ovat epätriviaaleja ja sivuutetaan. Lisäksi jokainen *separoituva* Banachin avaruus E on isomorfinen avaruuden $C(0,1)$ suljetun aliavaruuden kanssa (ja tämänkin todistus sivuutetaan).

(d) Sturmin–Liouvillen yhtälöiden yhteydessä tarkastelimme tavallisen normin

$$\| f \|_{H^1} = \Big(\int_0^1 (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}$$

lisäksi myös normia

$$\| f \|_E = \Big(\int_0^1 (|f'(x)|^2 p(x) + |f(x)|^2 q(x)) \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2},$$

missä $0 < \delta \leq p, q \leq M < \infty$. Silloin osoitimme, että

$$\sqrt{\delta} \| f \|_{H^1} \leq \| f \|_E \leq \sqrt{M} \| f \|_{H^1}$$

ja siten $\|\cdot\|_{H^1}$ ja $\|\cdot\|_E$ määrääväät avaruuteen H^1 saman topologian ja molemmat normit ovat täydellisiä.

Todistamme seuraavaksi hyödyllisen laajennusominaisuuden jatkuville operaattoreille.

6.16. **Lause.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus (jota* ei *oleteta suljetuksi) sekä $T\colon M \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva lineaarikuvaus $\widehat{T} : \overline{M} \to F$, jolle $\widehat{T}z = Tz$ kaikilla $z \in M$ ja $\| \widehat{T} \| = \| T \|$.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, jolle $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Jos $p, q \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\| Tx_p - Tx_q \| = \| T(x_p - x_q) \| \leq \| T \| \| x_p - x_q \|,$$

joten $(Tx_n) \subset F$ on Cauchyn jono. Koska F on Banachin avaruus, niin jonolla $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on raja-arvo $\widehat{T}z \in F$ (edellä $\widehat{T}z$ on vain merkintä, joka sanoo, että raja-arvo riippunee pisteestä z). Havaitaan, että tämä raja-arvo on riippumaton jonon (x_n) valinnasta. Nimittäin, olkoon $(y_n) \subset M$ toinen jono jolle myös $z = \lim_n y_n$. Toistamalla edellinen päättely jonolle (y_n) löydetään raja-alkio $y = \lim_n Ty_n \in F$. Koska $\| x_n - y_n \| \to \| z - z \| = 0$, niin kuvauksen T jatkuvuuden nojalla

$$\bar{0} = \lim_{n\to\infty} T(x_n - y_n) = \lim_n Tx_n - \lim_n Ty_n = \widehat{T}z - y.$$

Siispä $y = \widehat{T}z$. Päättelemme tästä, että raja-arvo

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

riippuu vain pisteestä $z \in \overline{M}$ eikä lainkaan approksimoivan jonon valinnasta. Nyt siis $\widehat{T}$ on kuvaus $\overline{M} \to F$. Jos $z \in M$ ja $x_n = z$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz,$$

joten $\widehat{T}$ on kuvauksen T laajennus.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\widehat{T}$ on lineaarinen kuvaus $\overline{M} \to F$. Olkoon $x, y \in \overline{M}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Valitaan sellaiset jonot $(x_n) \subset M$, $(y_n) \subset M$, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ja } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Tällöin myös jono $(z_n) = (x_n + \alpha y_n) \subset M$ ja tämä jono suppenee kohti vektoria $x + \alpha y$. Siispä alkuosan perusteella

$$\widehat{T}(x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} \alpha Ty_n = \widehat{T}x + \alpha\widehat{T}y.$$

Edellisessä käytimme operaattorin T lineaarisuutta sekä kolmioepäyhtälöä siihen, että raja-arvon voi jakaa kahteen osaan. Edellinen lasku siis osoittaa, että $\widehat{T}$ on lineaarinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\| T \| = \| \widehat{T} \|$. Jos $z \in \overline{M}$, niin valitaan sellainen jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, että $z = \lim_n x_n$. Tällöin

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

Koska $\| Tx_n \| \leq \| T \| \| x_n \|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kolmioepäyhtälön nojalla $\| x_n \| \to \| z \|$, niin

$$\| \widehat{T}z \| = \lim_{n\to\infty} \| Tx_n \| \leq \lim_{n\to\infty} \| T \| \| x_n \| = \| T \| \| z \|,$$

joten $\widehat{T}$ on jatkuva ja $\| \widehat{T} \| \leq \| T \|$. Toisaalta, jos $z \in M$, niin

$$\| Tz \| = \| \widehat{T}z \| \leq \| \widehat{T} \| \| z \|,$$

joten myös $\| T \| \leq \| \widehat{T} \|$.

Vielä on osoitettava kuvauksen $\widehat{T}$ yksikäsitteisyys. Olettakaamme, että S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\overline{M} \to F$, jolle $Sz = Tz$ kaikilla $z \in M$. Koska kuvaus $S - \widehat{T}$ on jatkuva $\overline{M} \to F$, niin jokaisella $z \in \overline{M}$ on voimassa

$$Sz - \widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Sx_n - Tx_n = 0,$$

kunhan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ on jono, jolle $x_n \to z$ kun $n \to \infty$. Siispä $S = \widehat{T}$ kaikilla $z \in \overline{M}$ ja kuvaus $\widehat{T}$ on siten yksikäsitteinen. □

Lause 6.16 on eräs lineaarioperaattoreiden filosofian kulmakivistä. Esimerkkinä tarkastellaan *Fourier-muunnosta.*

6.17. **Esimerkki.** Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ on integroituva ja $k \in \mathbb{R}$, asetetaan

(F) $$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(funktion } f \text{ Fourier-muunnos)}$$

Koska $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$, kun $x, k \in \mathbb{R}$, on yllä mainittu integraali hyvin määritelty kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R})$. Koska Fourier-sarjojen L^2-teoria on kaikkein toimivin (luku 5), haluaisimme määritellä Fourier-muunnoksen myös kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ongelma: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, joten (F):ssa oleva integraali ei ole määritelty kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$ (esimerkiksi funktio $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$ kuuluu $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$). Mikä neuvoksi ?

Ratkaisu: Oletetaan aluksi, että $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tällöin voidaan todistaa (ei kuitenkaan tehdä tässä) Parsevalin identiteetin vastine

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Toisin sanoen, kun $M = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, niin kuvaus $T : f \to \widehat{f}$ on lineaarinen isometria $\|\cdot\|_2$–normissa. Lauseen 6.16 nojalla kuvaus T laajenee jatkuvaksi lineaarioperaattoriksi $\overline{M} \to L^2(\mathbb{R})$, missä itse asiassa $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$. Näin Fourier-muunnos $\widehat{f}$ saadaan määriteltyä kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Nimittäin, jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin $f\,\chi_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kaikilla $n > 0$. Lebesguen dominoidun suppenemisen lause implikoi, että $\| f \cdot \chi_{[-n,n]} - f \|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten siis $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$. Yo. määrittelyprosessi voidaan kuvata myös konkreettisemmin. Jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin edellä dominoidun konvergenssin ja Lauseen 6.16 nojalla (yksikäsitteisyys!) saadaan

$$\widehat{f}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Neumannin sarja

Jos E on Banachin avaruus, $T \in \mathscr{L}(E)$ ja on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $T^{-1} \in \mathscr{L}(E)$, sanomme usein, että T on *kääntyvä* (isomorfismin sijasta). Seuraavalla sovelluksissa hyödyllisellä menetelmällä, eli niin sanotulla *Neumannin sarjalla*, pystymme useissa tilanteissa selvittämään operaattorin kääntyvyyden ja jopa laskemaan käänteisoperaattorin T^{-1}. Merkitsemme avaruuden E identtistä operaattoria $I = id_E$, siis $Ix = x$ kaikilla $x \in E$. Edelleen operaattorin T iteraatteja merkitsemme $T^0 = I$, $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k kappaletta).

6.18. **Lause** (Neumannin sarja)**.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$ jatkuva lineaarikuvaus. Jos $\| T \| < 1$, niin operaattori $I - T$ on kääntyvä ja*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = I + T + T^2 + \dots$$

missä yo. sarja on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa $\mathscr{L}(E)$.

Todistus. Lauseen 6.7 nojalla $\| T^k \| \le \| T \|^k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| T^k \| \le \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k < \infty,$$

mikä suppenee, sillä $\| T \| < 1$ ja oikean puoleisin sarja on geometrinen sarja. Koska $\mathscr{L}(E)$ on Banachin avaruus (Lause 6.6), niin Lauseen 3.22 sivulla 36 nojalla sarja

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k \in \mathscr{L}(E)$$

suppenee. Tarkastellaan nyt osasummia S_n. Koska

$$(I - T)S_n = I + T + \cdots + T^n - (T + T^2 + \cdots + T^{n+1}) = I - T^{n+1} = S_n(I - T),$$

niin $\| (I-T)S_n - I \| \le \| T \|^{n+1} \to 0$, kun $n \to \infty$ eli rajalla $(I-T)S = I$. Vastaavasti nähdään, että $S(I-T) = I$, eli S on operaattorin $I-T$ käänteisoperaattori. (Huomaa, että tulokuvaukset $U \mapsto UV$ ja $U \mapsto VU$ ovat jatkuvia Lauseen 6.7 nojalla, kun V on kiinteä jatkuva operaattori.) $\square$

6.19. **Esimerkki.** Palaamme jo johdantoluvussa sekä Banachin kiintopistelauseen yhteydessä tarkastelemaamme esimerkkiin (kts. Esimerkki 3.40 sivulla 49) eli tarkastelemme integraaliyhtälöä

$$(*) \qquad f(x) + \int_0^1 K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(x), \quad x \in [0,1],$$

missä $K \in C([0,1]\times[0,1])$ on jatkuva ja $\| K \|_\infty < 1$. Osoitamme nyt käyttämällä Neumannin sarjaa, että jos $g \in C(0{,}1)$, niin tällöin yhtälöllä $(*)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0{,}1)$. Asetetaan

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1],\ f \in C(0,1).$$

Olemme jo osoittaneet, että $T \in \mathscr{L}(C(0,1))$ ja $\| T \| \le \| K \|_\infty < 1$. Nyt voimme soveltaa Neumannin sarjaa operaattoriin $-T$, sillä $\| -T \| = \| T \| < 1$. Siispä operaattori $I+T = I-(-T)$ on kääntyvä, joten kirjoittamalla yhtälö $(*)$ operaattorimuodossa ja käyttämällä operaattorin $I+T$ kääntyvyyttä sekä Neumannin sarjaa saamme

$$(I+T)f = g \iff f = (I+T)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty}(-T)^k g.$$

Sivutuotteena konstruoimme ratkaisun $f \in C(0,1)$ sarjana. (Saatua sarjaa kannattaa verrata Banachin kiintopistelauseen antamaan konstruktioon, vrt. Esimerkki 3.40.)

Koska kääntyvyys on algebrallinen ominaisuus, niin kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän kaikkien jatkuvien operaattoreiden joukossa. Tämä seuraa seuraavasta huomiosta.

Huomautus. Jos $S, T \in \mathscr{L}(E)$ ja molemmat ovat kääntyviä, niin yhdistetty kuvaus ST on kääntyvä ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$, koska $STT^{-1}S^{-1} = SS^{-1} = I$ ja $T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$.

Neumannin sarjan avulla voimme myös tarkastella, minkälainen joukko kääntyvien operaattereiden joukko on topologisessa mielessä.

6.20. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus. Tällöin*
(i) jos $T \in \mathscr{L}(E)$ on kääntyvä ja $S \in \mathscr{L}(E)$ toteuttaa arvion $\| S \| < \| T^{-1} \|^{-1}$, niin tällöin $T - S$ on kääntyvä.

(ii) kääntyvien operaattorien joukko $\{\, T \in \mathscr{L}(E) : \ T$ *kääntyvä* $\}$ *muodostaa avoimen ryhmän avaruudessa* $\mathscr{L}(E)$ *operaattorintulon suhteen.*

Todistus. Koska $T \in \mathscr{L}(E)$ on kääntyvä, niin erotus $T - S$ voidaan esittää tulona $T - S = T(I - T^{-1}S)$. Oletuksen ja Lauseen 6.18 nojalla $\| T^{-1}S \| \leq \| T^{-1} \| \| S \| < 1$, joten Neumannin sarjan nojalla operaattori $I - T^{-1}S$ on kääntyvä. Siispä edellisen huomautuksen nojalla myös operaattoritulo $T(I - T^{-1}S) = T - S$ on kääntyvä. Tämä osoittaa väitteen (i). Kohta (ii) seuraa nyt edellisestä huomiosta, että kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän ja kohdasta (i), jonka nojalla kääntyvien operaattorien joukko on avoin. $\square$