5. Fourier-sarjat

Fourier esitti vuonna 1822 lämmönjohtamista koskevien tutkimusten yhteydessä kuuluisan menetelmänsä esittää mielivaltainen 2π-jaksollinen funktio kehitelmänä

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots .$$

Tästä nousee useita tärkeitä kysymyksiä, esimerkiksi
- suppeneeko sarja kohti funktiota f ja missä mielessä suppeneminen tapahtuisi?
- Määrääkö Fourier-sarja funktion f yksikäsitteisesti ja miten kertoimet c_n kuvaavat funktion f ominaisuuksia ?

Nämä kysymykset ovat olleet keskeisiä (koko) analyysin kehityksessä. Tutkimme seuraavaksi, mitä voidaan Hilbertin avaruus-metodeilla tässä tapauksessa saada aikaan.

Esitarkasteluja. Olkoon $L^2 = L^2(0, 2\pi)$ ja $f \in L^2$. Kun $n \in \mathbb{Z}$, on f:n n:s *Fourier kerroin* mukavinta määritellä kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x.$$

Nimittäin, jos

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n \left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right),$$

eli f on *trigonometrinen polynomi*, tällöin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}\, \mathrm{d}x = c_n$$

kun $n \in \{-N, \ldots, N\}$, kuten edellä summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihtamalla helposti huomaa.

Fourier-kertoimet liittyvät tietysti myös ortonormaaliin jonoon

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Nimittäin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e^{inx}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f \mid e_n \right)$$

Tässä sisätulo $(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$ on otettu avaruudessa $L^2(0,2\pi)$.

Jos $f \in L^2$ (tai jos $f \in L^p(0, 2\pi)$, $1 \le p < \infty$), sen n:s *Fourier-osasumma* on

$$s_n(x) \equiv s_n(f; x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad x \in [0,2\pi],$$

Huomaa, että summafunktio $s_n(f;x)$ on *pisteittäin* määritelty, koska funktio e^{ikx} on jatkuva kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

5.2. **Lemma.** *Fourier-osasummalle* s_n *on integraaliesitys*

$$s_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}$$

on n:s Dirichlet'n ydin*, kun* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Todistus. Fourier-kertoimen $\widehat{f}(n)$ määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} s_n(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

missä siis merkitään

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{ix}\right)^k.$$

Soveltamalla (kompleksiarvoisen) geometrisen summan kaavaa saadaan

$$D_n(x) = e^{-inx}\left(\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

Kertomalla tämä identiteetti puolittain termillä $e^{-ix/2}(e^{ix}-1) = e^{ix/2}-e^{-ix/2}$, saadaan

$$\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right) D_n(x) = e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}.$$

Eulerin kaava $e^{iu}-e^{-iu} = 2i\sin u$ (missä $u \in \mathbb{R}$) antaa lopuksi

$$2i\sin(x/2)D_n(x) = 2i\sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right).$$

□

5.3. **Lemma.** *Olkoon*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

Tällöin

i) Kaikilla $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *on voimassa*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

ii) Funktio $K_n(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. Lisäksi

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)},$$

kun $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$. (Tässä $0 < \delta < \pi$ on kiinnitetty.)

Huomautus. Aritmeettinen keskiarvo K_n on n:s *Fejérin ydin.* Ominaisuus (ii) kertoo, että Fejérin ytimet K_n ovat positiivisia ja $K_n \to 0$ tasaisesti, kun $n \to \infty$, kunhan x ei ole lähellä päätepisteitä 0 tai 2π. Dirichlet ytimillä D_n ei ole näitä ominaisuuksia. Tästä syystä Fourier-sarjojen *pisteittäisen* suppenemisen teoria on vaikeaa!

Todistus. (i) Koska $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,0}$, saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 1$$

kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Siispä sama väite pitää paikkaansa Dirichlet'n ytimien aritmeettiselle keskiarvolle K_n.
(ii) Edellä osoitimme, että $(e^{ix} - 1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$. Tämän vuoksi

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) = (e^{-ix} - 1)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}\right).$$

Yhtälön oikean puolen summa on kaksi geometrista summaa, joten edelleen hieman sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}(n+1)K_n(x)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1) &= \frac{e^{ix}(e^{-ix} - 1)}{e^{ix} - 1}(e^{i(n+1)x} - 1) - e^{-i(n+1)x} + 1 \\ &= (-e^{i(n+1)x} + 1) - e^{-i(n+1)x} + 1 = 2 - 2\cos\left((n+1)x\right).\end{aligned}$$

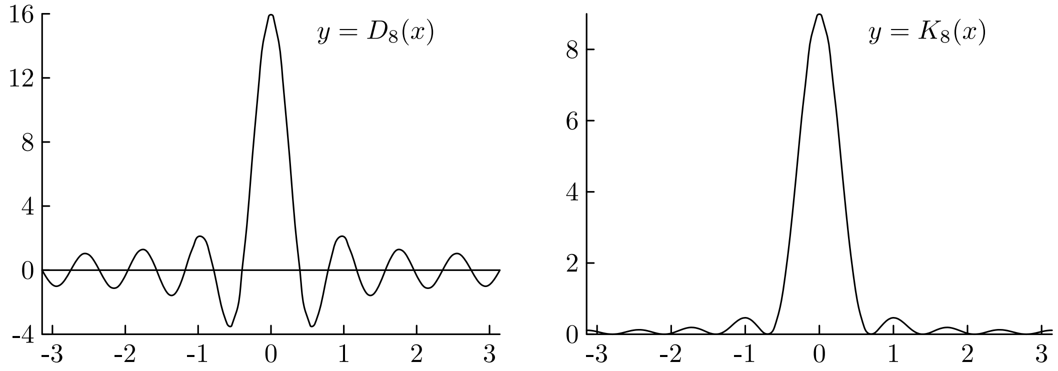
Koska $(e^{ix} - 1)\,(e^{-ix} - 1) = 2\,(1 - \cos x)$, saamme lopuksi

$$K_n(x) = \frac{1 - \cos\left((n+1)x\right)}{(n+1)(1-\cos x)} \geq 0$$

Huomaa, että koska $\cos(t) \leq 1$ kaikilla t, Fejérin ydin on tosiaankin positiivinen. Edelleen, Fejérin ytimelle löydetystä esityksestä ja kosinin ominaisuuksista seuraa että

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$$

kun $0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta < 2\pi$. □



KUVA 8. Dirichlet'n ja Fejérin ytimet ($n = 8$)

Seuraavaksi tutkimme Fejérin ytimien käyttäytymistä konvoluutioissa.

5.4. **Lause.** *Olkoon* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *jatkuva,* $f(0) = f(2\pi)$*, sekä*

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, \mathrm{d}t$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ *ja* $n \in \mathbb{N}$*. Silloin*

$$\| K_n * f - f \|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |K_n * f(x) - f(x)| \to 0,$$

eli $K_n * f(x) \to f(x)$ tasaisesti*, kun* $n \to \infty$*.*

Todistus. (vrt Reaalianalyysi I) Oletuksen nojalla f on tasaisesti jatkuva ja se voidaan jatkaa 2π-periodisena koko reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Myös K_n on 2π-periodinen ja jatkuva, joten muuttujanvaihtoa $u = x - t$ soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} K_n * f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, \mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u)\, K_n(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\, K_n(t)\, \mathrm{d}t \quad (= f * K_n(x)) \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $|u| < \delta$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Merkitään

$$M = \|f\|_\infty = \sup_{u \in [0,2\pi]} |f(u)| < \infty.$$

Lemman 5.3 kohdan ii) nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$0 \le K_n(u) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

kun $\delta \le u \le 2\pi - \delta$ ja $n \ge n_0$. Lemman 5.3 kohdan $ii)$ ja konvoluutiokaavan $K_n * f = f * K_n$ avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned}|K_n * f(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x-u)-f(x))\;K_n(u)\,\mathrm{d}u\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-u)-f(x)|\;K_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{\int_0^{\delta}\cdots+\int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\cdots}_{=I_1}+\underbrace{\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\cdots}_{=I_2}\end{aligned}$$

Käsittelemme erikseen integroinnit yli edellä määrättyjen välien. Nyt Lemman 5.3 kohdan $i)$, 2π-periodisuuden ja luvun δ valinnan nojalla

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vielä tulee käsitellä termi I_2. Nyt

$$\begin{aligned}I_2 =&\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le 2\Big(\sup_{[0,2\pi]}|f(x)|\Big)\sup_{x\in[\delta,2\pi-\delta]}K_n(x) \le 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Siispä jokaisella $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa $|K_n * f(x) - f(x)| \le I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ kaikilla $n \ge n_0$, joten väite seuraa. □

Huomautus. Lemmojen 5.2 ja 5.3 sekä integraalin lineaarisuuden nojalla

$$K_n * f(x) = \Big(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k\Big) * f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k * f(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f;x)$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lause 5.4 tunnetaan *Fejérin lauseen* nimellä. Lauseen 5.4 perusteella jatkuvan 2π-periodisen funktion f Fourier-osasummien *aritmeettinen keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f:ää välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös *pisteittäin* kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

Seurauksena tästä saadaan tärkeä yksikäsitteisyysominaisuus.

5.5. **Seuraus.** *Jos $f \in C(0, 2\pi)$ on 2π-periodinen ja $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f \equiv 0$.*

Todistus. Jos $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $s_n(f;x) = \sum \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla $f(x) = \lim_n K_n * f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. □

Siis jatkuvien funktioiden tapauksessa Fourier-kertoimet määräävät funktion yksikäsitteisesti, eli jos f ja g ovat jatkuvia ja 2π-periodisia, niin $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f = g$.

Todistamme seuraavaksi keskeisen approksimaatiotuloksen L^p-funktioille.[5] Tämä tulos kertoo sen, että sileät funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^p[0, 2\pi]$, kun $p \neq \infty$.

5.6. **Lause.** *Olkoon* $f \in L^p[0, 2\pi]$, *kun* $1 \leq p < \infty$, *ja* $\varepsilon > 0$. *Tällöin on olemassa* 2π*-periodinen* C^∞*-funktio* g, *jolle*

$$\text{(A)} \qquad \| f - g \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Todistus. Havaitaan aluksi, että $K_n * g$ on aina C^∞-funktio, sillä se on Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla äärellinen summa trigonometrisistä funktioista, jotka ovat C^∞-funktioita.

Lauseen 5.4 nojalla riittää siis löytää *jatkuva* funktio g, jolle (A) on voimassa, sillä tällöin

$$\| f - K_n * g \|_p \leq \| f - g \|_p + \| g - K_n * g \|_p,$$

missä

$$\| g - K_n * g \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |g(x) - K_n * g(x)| \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \| g - K_n * g \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Etsitään haluttu jatkuva funktio g ”asteittain”:

(1) Olkoon $f = \chi_F$ *suljetun* joukon $F \subset [0,2\pi]$ karakteristinen funktio. Asetetaan

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + n \operatorname{dist}(x, F)}, \qquad \text{kun } x \in [0, 2\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Etäisyysfunktio $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ on jatkuva (tarkista!), joten $g_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $g_n(x) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jos $x \in F$ ja $g_n(x) \to 0$, kun $x \notin F$ ja $n \to \infty$, sillä tällöin $\operatorname{dist}(x, F) > 0$. Siis $g_n \to \chi_F$ pisteittäin, kun $n \to \infty$. Koska $0 \leq g_n(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \| g_n - \chi_F \|_p^p &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Lisäksi muuttamalla funktiota g_n pienessä välissä $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ voi olettaa että $g_n(0) = g_n(2\pi)$.

tähän tulee kuva!!

[5] Vertaa Reaalianalyysi I

(2) Olkoon $f = \chi_A$ avoimen joukon $A \subset [0, 2\pi]$ karakteristinen funktio. Tällöin väite seuraa kohdasta (1), koska komplementti $A^c = [0, 2\pi] \setminus A$ on suljettu ja $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$.

(3) Olkoon $f = \chi_A$, kun $A \subset [0, 2\pi]$ Lebesgue-mitallinen joukko. Tällöin Lebesguen mitan määritelmä nojalla löytyy sellainen jono avoimia joukkoja $G_n \subset [0, 2\pi]$, että

$$G_n \supset A \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus A) = 0,$$

kun μ on Lebesguen mitta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $\mu(G_n \setminus A) < (\varepsilon/2)^p$. Edelleen kohdan (2) nojalla löytyy sellainen jatkuva 2π-periodinen funktio g, jolle $\| g - \chi_{G_n} \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Siispä

$$\| g - \chi_A \|_p \leq \| g - \chi_{G_n} \|_p + \| \chi_{G_n} - \chi_A \|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G_n \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(4) Olkoon $f \in L^p(0, 2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin Lebesguen integraalin määritelmän nojalla löytyy sellainen yksinkertainen funktio

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

että $\| f - g \|_p < \varepsilon$, missä $A_1, \ldots, A_n \subset [0, 2\pi]$ ovat mitallisia joukkoja. Soveltamalla kohtaa (3) kuhunkin karakteristiseen funktioon χ_{A_j} löydetään sellainen jatkuvat 2π-periodiset funktiot g_j, että

$$\| \chi_{A_j} - g_j \|_p < \frac{\varepsilon}{nM},$$

missä $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$. Siispä kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \Big\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \Big\|_p &\leq \| f - g \|_p + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \| g_j - \chi_{A_j} \|_p \\ &< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \frac{\varepsilon}{nM} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\sum_{j=1}^{n} a_j g_j$ on myös 2π-periodinen jatkuva funktio, väite seuraa. $\square$

5.7. *Huomautus.*

(1) Lauseen 5.6 nojalla sileiden C^∞-funktioiden muodostama aliavaruus on tiheä myös avaruudessa $L^p(a, b)$, kun $a < b$ ja $1 \leq p < \infty$, mikä seuraa lineaarisesta "muuttujanvaihdosta" $[a, b] \to [0, 2\pi]$.

(2) Lause 5.6 *ei päde* tapauksessa $p = \infty$, koska $C(0, 2\pi)$ ei ole tiheä avaruudessa $(L^\infty[0, 2\pi], \| \cdot \|_\infty)$ (vrt. HT 4:2).

(3) Jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa (dominoidun konvergenssin perusteella) sellainen $M < \infty$, että

$$\int_{J_M} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

kun $J_M = \{|x| > M\}$. Siispä vektorialiavaruus $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$.

(4) Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, $\mu(\Omega) > 0$ ja $f \in L^p(\Omega)$, niin asetetaan $\widetilde{f} = f \cdot \chi_\Omega$ eli

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases}$$

jolloin $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Tämän avulla voidaan päätellä, että $C^\infty|_\Omega \cap L^p(\Omega)$ on tiheä avaruudessa $L^p(\Omega)$, kun $1 \le p < \infty$, missä $C^\infty|_\Omega = \{f_{|\Omega} : f \in C^\infty(\mathbb{R})\}$.

(5) Voidaan myös osoittaa, että p-integroituvat $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktiot muodostavat tiheän aliavaruuden avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, katso Reaalianalyysi I, luku 2.4. (n-ulotteinen tapaus on vähän hankalampi, koska käytimme edellä Fejérin ytimien $K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k$ erikoisominaisuuksia).

Seurauksena saadaan yksikäsitteisyys myös L^2-funktioiden Fourier-sarjoille:

5.8. **Seuraus.** *Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{Z},$$

niin $f = \bar{0}$. Siis: jos $f, g \in L^2$ ja $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f = g$.

Erityisesti, jos

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{Z},$$

niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta avaruudessa L^2.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Approksimaatiolauseen 5.6 nojalla on olemassa sellainen *jatkuva* 2π-periodinen $g \in C(0, 2\pi)$, että $\| f - g \|_2 < \varepsilon$.

Lauseen 5.4 sivulla 81 mukaan konvoluutio $K_n * g \to g$ *tasaisesti* välillä $[0, 2\pi]$, kun $n \to \infty$, joten

$$\| g - K_n * g \|_2 \le \sqrt{2\pi} \| g - K_n * g \|_\infty < \varepsilon$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Sivun 82 huomautuksen nojalla

$$K_n * g = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n s_k(f, \cdot) = \sum_{k=-n}^n a_k e_k \quad \text{(trigonometrinen polynomi)},$$

missä $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$. Koska $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali jono, niin Huomautuksen 4.35 sivulla 70 nojalla

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \le \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 .$$

Tästä kolmioepäyhtälön nojalla seuraa, että

$$\begin{aligned}\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 &\le \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 \\ &\le \| f - g \|_2 + \Big\| g - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 < 2\varepsilon .\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla $(\, f \,|\, e_k \,) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joten edellisen arvion nojalla $\| f \|_2 < 2\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin $f = \bar{0}$.

Lauseen 4.39 sivulla 72 ehdon b) nojalla jono $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. □

Yhteenveto (Fourier-sarjojen L^2-teoriasta)

Kokoamme lyhyesti saamamme tulokset Fourier-sarjojen L^2-teoriasta.

1.) Jos $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali jono avaruudessa L^2.

2.) Jos $f \in L^2$ ja $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\, f \,|\, e_n \,) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin $f = \bar{0}$. (Seuraus 5.8) Siis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa L^2.

3.) Jos $f \in L^2$, niin

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\, f \,|\, e_n \,)\, e_n = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

missä sarja suppenee L^2-*mielessä*. Konkreettisesti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big| f(x) - \sqrt{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

(Lause 4.39 sivulla 72 ja Seuraus 5.8)

4.) Parsevalin identiteetin eli Lauseen 4.39 sivulla 72 kohdan d) nojalla

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2, \quad \text{kun } f \in L^2,$$

koska $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\, f \,|\, e_n \,)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

5.) Kääntäen, jos $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, niin tällöin on olemassa $f \in L^2(0,2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = \lambda_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä on Riesz–Fischerin lause eli Seuraus 4.37 sivulla 71. (Edellä $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikt}$ on haluttu funktio.)

Pisteittäisen suppenemisen teoriasta esitämme seuraavan sovelluksen, joka toimii esimerkiksi jatkuvasti derivoituville funktioille.

5.9. **Lause.** *Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on 2π-periodinen ja toteuttaa Lipschitz-ehdon $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \to f(x),$$

kun $n \to \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. (**ei käyty läpi luennoilla 2008**) Jos $h \in L^2$, niin Besselin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\big((\,h\,|\,e^{in\,\cdot}\,) + (\,h\,|\,e^{-in\,\cdot}\,)\big)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,((\,h\,|\,e_n\,) + (\,h\,|\,e_{-n}\,)) \to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Samoin

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Valitaan nyt

$$(*) \qquad h_x(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}.$$

Tällöin Lipschitz-ehdon nojalla funktio $h_x \in L^\infty[0,2\pi] \subset L^2[0,2\pi]$, koska $|h_x(t)| \le L\frac{|t|}{|\sin(t/2)|} \to 2L$ kun $t \to 0+$. Lemman 5.2 nojalla

$$\begin{aligned}S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Toinen identiteeteistä seuraa Lauseen 5.4 sivulla 81 todistuksessa olevasta konvoluutiokaavasta ja viimeinen siitä, että Lemman 5.3 sivulla 79 nojalla Dirichletin ytimen intgraali $\frac{1}{2\pi}\int D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Koska

$$D_n(t) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(t/2)} = \cos(nt) + \frac{\sin(nt)\cos(t/2)}{\sin(t/2)},$$

niin soveltamalla edellisiä identiteettejä yhteen saadaan

$$\begin{aligned} S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_x(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Koska kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ sekä $f(x-\cdot) - f(x) \in L^2$ että $h_x(t)\cos(t/2) \in L^2$, niin todistuksen alkuosan kahden raja-arvokaavan perusteella

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(f;x) - f(x)| = 0.$$

□

Sobolev-avaruudet

Olkoon $f \in C^1(0, 2\pi)$ jatkuvasti derivoituva, $f(0) = f(2\pi)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \Big/_{0}^{2\pi} f(t)e^{-ikt} \\ &+ \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = ik\widehat{f}(k), \end{aligned}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Joten Parsevalin identiteetin (Lause 4.39 sivulla 72) nojalla

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2. \tag{5.10}$$

Riesz–Fischerin lause (Seuraus 4.37 sivulla 71) vihjaa, että kaava (5.10) voisi olla voimassa yleisemmille funktioille f ja että on olemassa avaruuden L^2 vastine derivoituville funktioille; siis avaruus, joka koostuu funktioista $f \in L^2$, joille myös $f' \in L^2$.

Ongelma. Mikä on "derivaatta" f', jos $f \in L^2$?

Tarkastellaan aluksi *testifunktioiden avaruutta* $\mathscr{D}(\Omega)$, missä $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (voi olla $\Omega = \mathbb{R}$). Palautetataan mieleen, että jos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\operatorname{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}}$$

on ψ:n *kantaja.* Asetetaan nyt

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ \operatorname{supp}(\psi) \subset \Omega \text{ on kompakti}\ \}$$

(siis edellä $\operatorname{supp}(\psi)$ on suljettu ja rajoitettu joukko).

Huomautus. Jos $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin sen derivaatat $\psi^{(k)} \in \mathscr{D}(\Omega)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon $f \in C^1(\Omega)$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_\Omega f'\varphi\, dx = -\int_\Omega f\varphi'\, dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.11}$$

Edellisessä kaavassa ei ole sijoitustermiä, sillä testifunktio φ häviää joukon Ω reunalla.

Identiteetin (5.11) avulla voimme samaistaa derivaatan f' ja sitä vastaavan *lineaarikuvauksen*

$$L_{f'} : \varphi \mapsto -\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja $f \in C^1(\Omega)$. Seuraavaksi näytämme, että samaistus on järkevä (eli jos tunnemme lineaarikuvauksen $L_{f'}$, niin voimme selvittää funktion f' yksikäsitteisesti 0-mittaista joukkoa vaille).

5.12. **Lemma.** *Olkoon $f \in C^1(\Omega)$ ja Ω rajoitettu avoin väli. Jos $g \in L^2(\Omega)$ ja*

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x \quad \textit{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin $f'(x) = g(x)$ m.k. $x \in \Omega$.

Todistus. Oletuksen ja kaavan (5.11) nojalla saadaan

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f'\varphi\,\mathrm{d}x,$$

eli

$$\int_\Omega (f'-g)\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Siis $(f'-g) \perp \mathscr{D}(\Omega)$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.

Riittää siis näyttää, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, sillä tällöin testifunktioiden ortokomplementti $\mathscr{D}(\Omega)^\perp = \{\bar{0}\}$, joten $f' = g$ avaruuden $L^2(\Omega)$ alkioina.

Olkoon $\Omega = (0,1)$ (yleinen tapaus $\Omega = (a,b)$ voidaan palauttaa tähän lineaarisella muunnoksella). Etsimme kiinteällä $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ funktion $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, jolle pätee

1. kun $x \in \Omega$, niin $0 \le \eta_\varepsilon(x) \le 1$,
2. nollan ja ykkösen ympäristöissä funktio η_ε on identtisesti nolla, eli $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1-\varepsilon < x < 1$,
3. funktio $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$, kun $2\varepsilon < x < 1-2\varepsilon$

Tämän etsiminen jää harjoitustehtäväksi. Voit käytää apuna tietoa, että

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

on C^∞-funktio, vrt. Reaalianalyysi I.

Jos $f_0 \in C^\infty(\Omega)$, niin $\eta_\varepsilon f_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla

$$\| f_0 - \eta_\varepsilon f_0 \|_2^2 = \int_0^1 |1 - \eta_\varepsilon(x)|^2 |f_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. (Tarkasti ottaen: LDK pitää edellä soveltaa mielivaltaisella positiivisella jonolla (ε_k), jolle $\lim_k \varepsilon_k = 0$.) Siis $C^\infty(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$ avaruudessa $L^2(\Omega)$. Koska Lauseen 5.6 sivulla 83 nojalla tiedetään, että $\overline{C^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, niin edellisen perusteella myös $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$. $\square$

Huomautus. Lemman 5.12 todistus toimii sellaisenaan vain, jos $f' \in L^2(\Omega)$. (Esimerkiksi, jos $\Omega = \mathbb{R}$ niin $f \in C^1(\Omega)$ ei yleensä takaa että $f' \in L^2(\Omega)$.) Tämä tekninen rajoitus voidaan helposti kiertää, sillä jos $\Omega_j \subseteq \Omega$ on kompakti, niin soveltamalla todistusta derivaatan f' rajoittumaan kompaktiin joukkoon Ω_j nähdään, että $f' = g$ m.k $x \in \Omega_j$. Siirtyminen kompakteihin joukkoihin takaa, että jatkuva funktio on neliöintegroituva. Valitsemalla jono kompakteja osajoukkoja $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ siten, että $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$, niin edellisestä seuraa, että $f' = g$ m.k. $x \in \Omega$.

5.13. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a,b)$ avoin väli ja $f \in L^2(\Omega)$. Funktio $g \in L^2(\Omega)$ on f:n *heikko* derivaatta (eli *yleistetty* derivaatta tai *distribuutioderivaatta*), jos

$$L_g(\varphi) := \int_\Omega g\,\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi' \,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Jos f:lla on heikko derivaatta g, niin merkitään edelleen $g = f'$.

5.14. *Huomautus.* (1) Jos heikko derivaatta g on olemassa, niin g on yksikäsitteinen L^2-funktiona. Tämä seuraa soveltamalla Lemman 5.12 todistusta. Nimittäin, jos $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ toteuttavat

$$\int_\Omega g_1\,\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi' \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g_2\,\varphi \,\mathrm{d}x$$

kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin $g_1 - g_2 \perp \mathscr{D}(\Omega)$. Koska $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ tästä seuraa, että $g_1 = g_2$.
(2) Jos $f \in C^1(\Omega)$, niin identiteetin (5.11) nojalla $g = f'$ tavallisessa mielessä.

5.15. *Huomautus* (Lisätieto). Yllä olevien heikkojen derivaattojen tarkastelu johtaa *distribuutioihin* (eli yleistettyihin funktioihin). Näihin joudutaan (esimerkiksi) seuraavista luontevista vaatimuksista:

(a) jokainen jatkuva funktio on distribuutio,

(b) distribuutioilla on *kaikkien* kertalukujen derivaatat, jotka ovat edelleen distribuutioita. Jos $f \in C^1$, niin sen derivaatta "distribuutiona" on tavallinen derivaatta f'.
(c) derivaatan tavallisten laskusääntöjen tulee olla voimassa (distribuutioiden *tulo* on ongelma!).
(d) distribuutioilla tulee olla riittävän hyviä konvergenssi ominaisuuksia (rajaprosesseja varten).

Itse asiassa, *distribuutio* määritellään lineaarikuvauksena $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. Jokainen jatkuva $f \in C(\Omega)$ määrää lineaarikuvauksen $\Lambda_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ehdolla $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x$, kun $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ (siis (a) on voimassa). Jos asetamme kaavan (5.11) sivulla 89 motivoimana, että

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi'), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin ehdot (b) ja (c) tulevat täytetyiksi. Kohtaa (d) varten testifunktioiden joukko $\mathscr{D}(\Omega)$ pitää varustaa sopivalla topologialla τ, jolloin distribuutiot ovat tarkalleen *jatkuvat* lineaarikuvaukset $(\mathscr{D}(\Omega), \tau) \to \mathbb{K}$. Tämän topologian määrittely sekä karakterisointi vaatii lisätyötä, joten se sivuutetaan tällä kurssilla.[6]

5.16. **Esimerkki.** Olkoon $\Omega = (-1, 1)$ ja

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\textit{Heavisiden} \text{ funktio}).$$

Tällöin $H \in L^2(\Omega)$, mutta kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ pätee

$$-\int_{-1}^{1} \varphi'(x) H(x) \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(0) - \underbrace{\varphi(1)}_{=0} = \varphi(0).$$

Toisaalta: $H'(x) = 0$ tavallisessa mielessä kun $x \neq 0$, eikä voi olla olemassa funktiota $g \in L^2(\Omega)$, jolle samalla myös

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

5.17. *Huomautus.* Heavisiden funktion H derivaatta "distribuutiona" on ns. *Diracin deltafunktionaali* δ, jolle siis $\delta(x) = 0$ kun $x \neq 0$ ja $\int_\Omega \delta(x) \, dx = 1$. Tällöin δ ei voi olla tavallinen funktio, vaan se on *aito distribuutio*; itse asiassa δ *on* lineaarikuvaus $\varphi \mapsto \varphi(0) : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. [Huomaa myös, että edellisessä esimerkissa heikko derivaatta on **eri asia** kuin derivaatta "distribuutiona".]

---

[6] katso esimerkiksi Walter Rudin: "Functional Analysis".

5.18. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a,b)$ avoin väli. *Sobolev-avaruus* $H^1 = H^1(\Omega)$ koostuu niistä avaruuden L^2 funktioista f, joilla on heikko derivaatta $f' \in L^2$ eli

$$H^1 = \{\, f \in L^2(\Omega) : \text{ funktiolla } f \text{ on heikko derivaatta } f' \in L^2(\Omega) \,\}.$$

Huomautus. Merkintä H^1 viittaa derivaatan kertalukuun ja H Hilbertin avaruuteen. Usein merkitään myös $H^1 = W_2^1 = W^{1,2}$.

5.19. **Lause.** *H^1 on Hilbert-avaruus varustettuna sisätulolla*

$$(\, f \,|\, h\,) = \int_\Omega [f(x)\overline{h(x)} + f'(x)\overline{h'(x)}]\,\mathrm{d}x, \qquad f,g \in H^1.$$

Todistus. Avaruuden H^1 määritelmän ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön 4.2 sivulla 56 nojalla muoto $(\, f \,|\, g\,)$ on hyvin määritelty, sillä $f,h,f',h' \in L^2(\Omega)$. Lisäksi

$$\begin{aligned}\| f-h \|_{H^1}^2 &= \int_\Omega [(f(x)-h(x))(\overline{f(x)}-\overline{h(x)}) + \underbrace{(f-h)'(x)}_{=f'(x)-h'(x)}\,\overline{(f-h)'(x)}]\,\mathrm{d}x \\ &= \| f-h \|_{L^2}^2 + \| f'-h' \|_{L^2}^2\end{aligned}$$

kaikilla $f,g \in H^1$. Siis jos $(f_n) \subset H^1$ on Cauchyn jono, niin jonot $(f_n) \subset L^2(\Omega)$ ja $(f_n') \subset L^2(\Omega)$ ovat Cauchyn jonoja. Koska $L^2(\Omega)$ on täydellinen, niin löytyy sellaiset $f,g \in L^2(\Omega)$, että $f_n \to f$ ja $f_n' \to g$ avaruudessa $L^2(\Omega)$. Riittää siis näyttää, että g on funktion f heikko derivaatta.

Jos $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin

$$\int_\Omega f_n \varphi'\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f_n'\varphi\,\mathrm{d}x$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f\varphi'\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g\varphi\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_\Omega (f-f_n)\varphi'\,dx + \int_\Omega (g-f_n')\varphi\,dx\right| \\ &\le \| f-f_n \|_{L^2} \| \varphi' \|_{L^2} + \| g-f_n' \|_{L^2} \| \varphi \|_{L^2} \to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Siis

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

eli $f' = g \in L^2(\Omega)$. □

Tarvitsemme myöhemmissä esimerkeissä Sobolev-funktioiden perusominaisuuksia ja näitä varten tarvitaan seuraava versio analyysin peruslauseesta heikoille derivaatoille.

5.20. **Lemma.** *Jos $f \in L^2(\Omega)$ ja $\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ (eli siis heikko derivaatta $f' = \bar{0}$), niin $f(x) \equiv C$ (vakio) m.k. $x \in \Omega$, toisin sanoen, joukko $\{\, x \in \Omega : f(x) \neq C \,\}$ on 0-mittainen.*

Todistus. Olkoon $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ funktio, jolle $\int_\Omega \psi\, dx = 1$. Jos $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen, niin asetetaan

$$\varphi(x) = \int_a^x \Big(w(t) - \Big(\int_\Omega w(y)\,\mathrm{d}y \Big) \psi(t) \Big)\, \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Tämän havaitsemiseksi lasketaan ensin φ derivaatta, joka on $\varphi'(t) = w(t) - (\int w\,\mathrm{d}x)\psi(t)$. Olkoon nyt väli $[c,d] \subset \Omega = (a,b)$ sellainen, että $\operatorname{supp}(\psi) \cup \operatorname{supp}(w) \subset [c,d]$. Silloin kaikilla $c' \in [a,c]$ pätee $\varphi(c') = 0$ ja

$$\begin{aligned}
\varphi(d') = \varphi(d') - \varphi(c') &= \int_{c'}^{d'} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c'}^{d'} \Big(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \Big)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega w(t)\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \psi(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

kaikilla $d' \in [d,b]$, sillä $\int \psi\,\mathrm{d}x = 1$. Siispä $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ ja on kompakti.

Oletuksen ja Fubinin lauseen[7] nojalla on siis

$$\begin{aligned}
0 = \int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(t) \Big(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \Big)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega w(x) \Big(f(x) - \int_\Omega f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \Big)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Koska $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen ja $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (Lauseen 5.12:n todistus), niin tästä seuraa, että

$$f(x) - \underbrace{\int_\Omega f\,\psi\,\mathrm{d}t}_{=C=\text{vakio}} = 0 \qquad \text{m.k.} \quad x \in \Omega$$

□

Analyysin peruslauseen (Lemma 5.20) avulla voimme osoittaa, että Sobolev-funktiot ovatkin hieman sileitä myös tavallisessa mielessä. Tarkemmin sanoen seuraava tulos on voimassa.

5.21. **Lause.** *Jos $\Omega = (a,b)$ on rajoitettu väli, $f \in H^1(a,b)$ ja $f' \in L^2(\Omega)$ on sen heikko derivaatta, niin*
(a) f on jatkuva (tarkemmin: on olemassa $\widetilde{f} \in C(a,b)$, jolle $\widetilde{f}(x) = f(x)$ m.k. $x \in \Omega$ eli funktion f määräämä L^2-luokka sisältää jatkuvan edustajan*)*
(b)

$$f(x) = \int_{x_0}^x f'(t)\,\mathrm{d}t + f(x_0) \qquad \text{m.k.} \quad x, x_0 \in (a,b)$$

[7] integroimisjärjestyksen vaihto, kts. Mitta ja integraali

Huomautus. (1) Ominaisuus ”on olemassa jatkuva edustaja” on vahvempi kuin ominaisuus ”m.k. jatkuva”. Esimerkiksi välin $[0,1]$ karakteristinen funktio $\chi_{[0,1]}$ on jatkuva m.k. $x \in \mathbb{R}$, mutta ei ole olemassa sitä vastaavaa jatkuvaa edustajaa.
(2) Jos f on *jatkuva* funktio, jolle löytyy $f'(x)$ m.k. x (tavallisessa mielessä) ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin tällöin (b) *ei* aina päde (Reaalianalyysi I: on olemassa jatkuva ns. *Cantorin funktio* $f : [0,1] \to [0,1]$, jolle $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [0,1]$, sekä $f(0) = 0, f(1) = 1$).

Lauseen 5.21 todistus. Voidaan vapaasti olettaa, että $(a,b) = (0,1)$. Olkoon $x_0 \in (0,1)$. Määritellään funktio

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

joka on hyvin määritelty, sillä $f' \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ Schwarzin tai Hölderin epäyhtälön nojalla. (Tässä tarvitaan, että väli Ω on rajoitettu.) Jos $x, y \in (0,1)$, niin Hölderin nojalla (jos $x < y$)

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f'(t)dt - \int_{x_0}^{y} f'(t)dt \right| = \left| \int_{x}^{y} f'(t)dt \right| \\ &\le \left(\int_{x}^{y} |f'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{x}^{y} 1dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|y-x|^{\frac{1}{2}}} \le \| f \|_{H^1} |x-y|^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

eli h on tasaisesti jatkuva $(0,1) \to \mathbb{K}$ ja siten myös jatkuva välillä $[0,1]$.

Väite: $f(x) - h(x) = C$ (vakio) m.k. $x \in (0,1)$ (*Huom*: kohdat (a) ja (b) seuraavat tästä heti).
Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ mielivaltainen ja $x_0 = 0$ (merkintöjen helpottamiseksi). Fubinin lauseen, heikon derivaatan määritelmän sekä $\varphi(1) = 0$, avulla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi'(x)h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi'(x) \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 f'(t) \underbrace{\left(\int_t^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right)}_{=\varphi(1)-\varphi(t)=-\varphi(t)} \mathrm{d}t = -\int_0^1 f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

joten

$$\int_0^1 \varphi'(t)(h(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Siispä Lemman 5.20 nojalla $f(x) - h(x) \equiv C$ m.k. $x \in (0,1)$. (Perustele itsellesi miten edellä Fubinin lausetta käytetään, kun integroimisjoukko on

$$A = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le x\} = \{(x,t) : 0 \le t \le 1, t \le x \le 1\}.)$$

$\square$

Seuraavassa oletetaan aina, että Sobolev-funktio $f \in H^1(a,b)$ on jatkuva (siis edustajana Lauseen 5.21.(a) mielessä) ja erityisesti

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{ja} \quad f(b) = \lim_{x \to b-} f(x)$$

ovat olemassa (katso Lauseen 5.21 todistus). Siis tässä mielessä

$$H^1(a,b) \subset C(a,b) \, (= \{ \, f \colon [a,b] \to \mathbb{K} : \; f \text{ on jatkuva } \}).$$

Kirjoitetaan näkyviin pari seurausta Lauseelle 5.21.

5.22. **Seuraus.** *Jos $f \in H^1(a,b)$ ja heikko derivaatta $f' \in C(a,b)$, niin $f \in C^1(a,b)$.*

Todistus. Lauseen 5.21 ja derivaatan f' jatkuvuuden nojalla

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) \, \mathrm{d}t$$

kaikilla $x_0, x \in [a,b]$. $\square$

5.23. **Seuraus.** *Joukko $H_0^1(a,b) = \{ \, f \in H^1(a,b) : \; f(a) = f(b) = 0 \, \}$ on avaruuden $H^1(a,b)$* suljettu *aliavaruus (ja siis Hilbert avaruus).*

Todistus. HT/8 $\square$

Huomautus. (1) Koska avaruuden H^1 funktiot ovat jatkuvia, niin 2π-periodisessa tapauksessa $H^1(0,2\pi)$ voidaan karakterisoida Fourier-kertoimien avulla: eli funktio $f \in H^1(0,2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$ jos ja vain jos

$$f \in L^2(0,2\pi) \quad \text{ja} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Tämä seuraa sivulla 88 olevasta johdantotekstistä Sobolev-avaruuksiin, kun lisäksi yhdistämme tähän päättelyyn HT 9/2006 tehtävässä 2 osoitettua tulosta.
(2) Sobolev-avaruudet voidaan rakentaa korkeammissakin dimensioissa ja L^p-avaruuksissa: kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $1 \le p < \infty$ määritellään

$$W_p^1(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : f\text{:n heikot osittaisderivaatat } \partial_1 f, \ldots, \partial_n f \in L^p(\Omega)\}.$$

Vastaavasti vaatimalla, että L^p-funktion f kaikkien korkeintaan astetta[8] k olevat heikot derivaatat $\partial^\alpha f \in L^p$, voimme myös määritellä Sobolev-avaruudet

[8]sanomme, että $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f$ on astetta k, jos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$

$W_p^k(\Omega)$ sekä $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$. Tällöin voidaan osoittaa Lauseen 5.21 sivulla 93 vastine eli erikoistapaus *Sobolevin upotuslauseesta*:

Jos $k > \frac{n}{2}$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on riittävän sileäreunainen, niin $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Sovelluksista differentiaaliyhtälöihin

sivujen 96 -101 SL-sovellusta ei luennoitu keväällä 2008

Hilbertin avaruus-metodeja voidaan käyttää apuna myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Tarkastellaan klassisena esimerkkinä *Sturmin–Liouvillen* yhtälöitä: Oletetaan, että on annettu funktiot $p \in C^1(0,1)$, $q \in C(0,1)$ ja etsitään funktiota $u \in C^2(0,1)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot

$$\text{(SL)} \qquad \begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in (0,1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

Teemme seuraavat *lisäoletukset*: on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\text{(5.24)} \qquad p(x) \geq \delta \quad \text{ja} \quad q(x) \geq \delta \quad \text{aina, kun } x \in [0,1]$$

Seuraava tärkeä *heikon ratkaisun* käsite kytkee yhteen differentiaaliyhtälöt ja Hilbertin avaruudet.

5.25. **Määritelmä.** Funktio $u \in H^1(0,1)$ on yhtälön (SL) *heikko ratkaisu*, jos $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ sekä

$$\int_0^1 p(x)\varphi'(x)u'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)\varphi(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

kaikilla testifunktiolla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Toisin sanoen, funktio u on Sturmin–Liouvillen yhtälön (SL) heikko ratkaisu, jos funktion pu' heikko derivaatta on qu. Todistamme nyt Hilbertin avaruusmenetelmillä seuraavan tuloksen, jonka tarkennuksiin palaamme myöhemmin kurssilla, kunhan olemme saaneet uusia ja tehokkaampia työkaluja.

5.26. **Lause.** *Kun p ja q ovat alhaalta rajoitettuja (eli kun ehto* (5.24) *toteutuu), niin yhtälöllä* (SL) *on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in C^2(0,1)$.*

Todistus. Todistamme väitteen useissa pienissä askeleissa.
1. askel: Ensimmäisenä askeleen osoitetaan, että

Väite. *Jos $u \in C^2$ on yhtälön* (SL) *klassinen ratkaisu*[9]*, niin u on myös heikko ratkaisu.*

[9] siis $u \in C^2(0,1)$ ja u toteuttaa reuna-arvotehtävän (SL)

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_0^1 (p\,\varphi'\,u' + q\,u\varphi)(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{\!0}^{1}\, p(x)\varphi(x)u'(x) + \int_0^1 \varphi(x)\underbrace{\big(-(p\,u')' + q\,u\big)(x)}_{\equiv 0}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Sijoitustermi häviää, sillä $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Siis u on Määritelmän 5.25 nojalla myös heikko ratkaisu. □

2. askel: Asetetaan avaruuteen $H^1(0,1)$ uusi sisätulo

$$\langle\, u \,|\, v\,\rangle = \int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Selvästi $\langle\, u \,|\, v\,\rangle$ on funktion u suhteen lineaarinen, $\langle\, u \,|\, v\,\rangle = \overline{\langle\, v \,|\, u\,\rangle}$ ja lisäksi $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ on aidosti positiviinen, sillä $p(x) \geq \delta \geq 0$ ja $q(x) \geq \delta \geq 0$. Siispä $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ on todella sisätulo avaruudessa $H^1(0,1)$.

Väite. *Joukko $H^1(0,1)$ varustettuna sisätulolla $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ on Hilbertin avaruus.*

Todistus. On siis vielä näytettävä, että $H^1(0,1)$ on täydellinen normissa

$$|||\, u \,||| := \sqrt{\langle\, u \,|\, u\,\rangle}, \quad u \in H^1(0,1).$$

Olemme olettaneet, että $\delta \leq p, q$ ja koska p sekä q ovat jatkuvina funktioina rajoitettuja välillä $[0,1]$, niin jollakin vakiolla $M > 0$ on

$$0 < \delta \leq p(x) \leq M < \infty, \quad 0 < \delta \leq q(x) \leq M < \infty.$$

Nyt

$$\begin{aligned} |||\, u - v \,|||^2 &= \int_0^1 [p(x)|u'(x) - v'(x)|^2 + q(x)|u(x) - v(x)|^2]\,\mathrm{d}x \\ &\leq M \int_0^1 [|u'(x) - v'(x)|^2 + |u(x) - v(x)|^2]\,\mathrm{d}x = M\|\, u - v \,\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $\delta\|\, u - v \,\|_{H^1}^2 \leq |||\, u - v \,|||^2$. Siis, jos (u_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(H^1, |||\cdot|||)$, niin se on Cauchyn jono myös avaruudessa $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$. Koska $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$ on täydellinen (Lause 5.19 sivulla 92), niin löytyy sellainen $u \in H^1$, että $\|\, u_n - u \,\|_{H^1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $|||\, u_n - u \,||| \leq M\|\, u_n - u \,\|_{H^1} \to 0$, ja siis myös avaruus $(H^1, |||\cdot|||)$ on täydellinen. □

3. askel: Seuraava askel on näyttää, kuinka yhtälölle (SL) löydetään heikko ratkaisu.

Väite. *Yhtälöllä* (SL) *on heikko ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $E = (H^1, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$, missä sisätulo $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ on sama kuin askeleessa 2, jolloin siis E on Hilbertin avaruus. Valitaan nyt jokin $f \in E$, jolle $f(0) = \alpha$ ja $f(1) = \beta$, esimerkiksi funktio $f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$ kelpaa. Seurauksen 5.23 sivulla 95 nojalla H_0^1 on avaruuden H^1 suljettu aliavaruus ja edellisen askeleen todistuksen nojalla H_0^1 on myös avaruuden E suljettu aliavaruus. Siispä voimme soveltaa luvun 4 normin minimointituloksia: Seurauksen 4.18 sivulla 63 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $g \in H_0^1$, jolle

$$|||\, f - g \,||| = \inf\{\, |||\, f - h \,||| : \ h \in H_0^1 \,\}.$$

Edelleen Lauseen 4.20 sivulla 65 nojalla $(f - g) \perp H_0^1$ sisätulon $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ suhteen. Jos nyt merkitään $u = f - g$, niin

$$u(0) = f(0) - g(0) = \alpha - 0 = \alpha \quad \text{ja} \quad u(1) = f(1) - g(1) = \beta.$$

Koska selvästi $\mathscr{D}(0,1) \subset H_0^1(0,1)$, niin jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ on

$$0 = \langle\, f - g \,|\, \overline{\varphi} \,\rangle = \int_0^1 [p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)]\,\mathrm{d}x$$

eli funktio u on yhtälön (SL) heikko ratkaisu! □

Huomautus. Edellä esitetty heikon ratkaisun konstruointi voidaan tulkita myös *Dirichlét'n periaatteena*: Jos

$$I(u) = \int_0^1 [p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2]\,\mathrm{d}x = |||\, u \,|||,$$

niin yhtälön (SL) heikko ratkaisu on funktio $u_0 \in H^1(0,1)$, joka toteuttaa reunaehdot $u_0(0) = \alpha$, $u_0(1) = \beta$ ja jolle pätee

$$I(u_0) = \inf\{\, I(u) : \ u(0) = \alpha \text{ ja } u(1) = \beta \,\}.$$

4. askel: Tässä askeleessa osoitamme, että yhtälöllä (SL) on korkeintaan yksi ratkaisu. Yhdessä edellisen askeleen kanssa tämä takaa sen, että yhtälöllä on tarkalleen yksi heikko ratkaisu. Tätä varten tarvitsemme seuraavan lemman, joka osoittaa, että testifunktiot ovat tiheässä avaruudessa H_0^1 (mutta eivät kuitenkaan koko Sobolev-avaruudessa H^1 !!).

5.27. **Lemma.** *Testifunktioiden sulkeuma* $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$*, kun* Ω *on rajoitettu väli ja sulkeuma otetaan* H^1*-normin suhteen.*

Todistus. Oletetaan seuraavassa laskujen yksinkertaistamiseksi, että $\Omega = (0,1)$. Ensiksi, $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$, koska $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ja aliavaruus $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ on suljettu.

Kääntäen, jos $f \in H_0^1(\Omega)$, niin Lauseen 5.21 sivulla 93 nojalla

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Edelleen Lemman 5.12 sivulla 89 todistuksessa osoitettiin, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (normin $\| \cdot \|_2$ suhteen), joten löytyy $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, jolle $\| f' - g \|_2 < \varepsilon$. Koska väli $[0,1]$ on rajoitettu, niin tiedämme, että $\| f' - g \|_1 \leq \| f' - g \|_2 < \varepsilon$. Siten

$$(*) \qquad \Big| \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int_0^1 [g(x) - f'(x)]\,\mathrm{d}x \Big| \leq \| g - f' \|_1 < \varepsilon,$$

missä ensimmäinen yhtälö seuraa tiedosta $0 = f(1) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Väitteen osoittamiseksi haluaisimme nyt konstruoida funktion $h \in \mathscr{D}(0,1)$, jolle sekä $\| f - h \|_2$ ja $\| f' - h' \|_2$ olisivat pieniä. Hyvä kandidaatti vaikuttaisi olevan funktion g integraalifunktio, eli

$$(**) \qquad h(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Onko tämä integraalifunktio h kuitenkaan $\mathscr{D}(0,1)$:ssä? Jotta se olisi, on oltava $h(1) = 0$, mikä tarkoittaa, että vakio

$$c = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Meillä on edellä tiedossa ainoastaan arvio $(*)$. Korjataksemme tämän puutteen argumentoimme Lemman 5.20 tapaan: *kiinnitämme* testifunktion $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$, joka toteuttaa ehdot $\varphi \geq 0$ ja $\| \varphi \|_1 = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Olkoon nyt $\widetilde{g} := g - c\varphi$. Silloin $\widetilde{g} \in \mathscr{D}(0,1)$, $\int_0^1 \widetilde{g}\,\mathrm{d}t = 0$ ja lisäksi

$$\| g - \widetilde{g} \|_2 = |c| \, \| \varphi \|_2 < \varepsilon \| \varphi \|_2$$

arvion $(*)$ nojalla. Voimme nyt vaihtaa funktion g funktioksi $\widetilde{g}$, jolloin kaavan $(**)$ määräämä integraalifunktio $h \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt loppuargumentti etenee suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned}
\| f - h \|_{H^1}^2 &= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - h'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big| \int_0^x (f'(t) - \widetilde{g}(t))\,\mathrm{d}t \Big|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - \widetilde{g}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \Big(\int_0^x |f'(t) - \widetilde{g}(t)|\,\mathrm{d}t \Big)^2 \mathrm{d}x + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \\
&\leq \int_0^1 |f'(t) - \widetilde{g}(t)|^2\,\mathrm{d}t + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \leq 2(1 + \| \varphi \|_2)^2 \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen arvio seuraa Cauchy–Schwarzin (tai Hölderin) epäyhtälön nojalla. Siispä $H_0^1(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$. $\square$

Edeltävän lemman avulla voimme nyt osoittaa askeleen 4. väitteen:

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistus. Osoitimme 3. askeleessa, että jos $g \in H_0^1$ on se *yksikäsitteinen* alkio, jolle $f - g \perp H_0^1$, niin $u = f - g$ toteuttaa yhtälön (SL).

Kääntäen, jos u_1 toteuttaa yhtälön (SL), niin reunaehdon nojalla $u_1 = f - g_1$, missä $g_1 \in H_0^1(0,1)$. Heikon ratkaisun määritelmän nojalla $\langle u_1 \,|\, \varphi \rangle = 0$ jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ eli $f - g_1 \perp \mathscr{D}(0,1)$. Mutta Lemman 5.27 mukaan $\overline{\mathscr{D}(0,1)} = H_0^1$, joten $f - g_1 \perp H_0^1$. Siispä Lauseen 4.20 sivulla 65 nojalla $\| f - g_1 \| = \operatorname{dist}(f, H_0^1)$, joten Lauseen 4.17 sivulla 63 nojalla $u_1 = f - g_1 = f - g = u$, joten ratkaisu on yksikäsitteinen. □

5. askel: Viimeisenä askeleena osoitamme, että edellisissä askeleissa konstruoitu yksikäsitteinen heikko ratkaisu on myös klassinen ratkaisu.

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu u on klassinen ratkaisu eli* $u \in C^2[0,1]$.

Todistus. Alkujaan tiedetään, että $u \in H^1$, joten $u' \in L^2(0,1)$. Koska $p \in C^1(0,1)$, niin tulo $pu' \in L^2(0,1)$. Koska tulon pu' heikko derivaatta on $qu \in L^2$, niin tiedämmekin siis, että $pu' \in H^1(0,1)$, joten Lauseen 5.21 nojalla funktio pu' on jatkuva. Edelleen, koska $p \geq \delta > 0$, niin $u' \in C(0,1)$, joten olemme johtaneet, että itse asiassa $u \in C^1(0,1)$.

Nyt $(pu')' = qu \in C(0,1)$ myös klassisessa mielessä, joten $pu' \in C^1(0,1)$, mistä seuraa edelleen, että $u \in C^2(0,1)$. □

Yhdessä kaikki askeleet osoittavat Lauseen 5.26 väitteen. □

Lisätietoja: (1) Edellä esitetty Sturmin–Liouvillen yhtälöiden ratkaisumenetelmää voidaan soveltaa korkeammissa dimensioissa ns. *elliptisiin yhtälöihin*, joiden prototyyppi on

$$\begin{cases} -\triangle u + u = 0, \\ u|\partial\Omega = f, \end{cases}$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $\triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial_j^2}$. Ratkaisustrategia toimii kuten edellä:

i) Klassinen ratkaisu on heikko ratkaisu
ii) On olemassa heikko ratkaisu
iii) Heikko ratkaisu on yksikäsitteinen (joten myös klassinen ratkaisu on yksikäsitteinen)
iv) Heikko ratkaisu u on riittävän säännöllinen (eli edellä $u \in C^2$).

Tästä yhtälöstä päästään *Laplacen yhtälöön* $\triangle u = 0$ Fredholm-operaattoreiden tai Fredholmin teorian avulla (jolloin voimme myös luopua oletuksesta, että $q \geq \delta > 0$).

(2) Historiallisesti, Bernhard Riemann (1826–1866) ratkaisi yhtälön $\triangle u = f$ juuri edellä mainitun Dirichlét'n periaatteen avulla. Karl Weierstraß (1815–1897) aiheutti sensaation kriittisellä artikkelillaan "Über das Sogenannte Dirichletsche Princip", jossa hän esitti seuraavan vastaesimerkin: Jos

$$J(u) = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x,$$

niin ei ole jatkuvaa funktiota u_0, jolle $u_0(1) = 1$, $u_0(-1) = -1$ ja

$$J(u_0) = \inf\{\ J(u) :\ \ u(-1) = 1, u(1) = -1\ \}$$

Todistus. Jos

$$\varphi(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\varepsilon}}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

niin

$$\varphi'(x) = \frac{\varepsilon}{(\arctan \frac{1}{\varepsilon})(x^2 + \varepsilon^2)},$$

joten

$$J(\varphi) < \frac{2\varepsilon}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}} \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. □

Miksi Dirichlét'n periaate ei toimikaan? Syy (joka ymmärrettiin vasta 1900-luvulla) on se, ettei H^1 (tai H_0^1) ole täydellinen normissa

$$\| u \| = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Tästä samasta syystä oletettiin edellä, että $p, q \geq \delta$ yhtälössä (SL). [10] Weierstrassin kritiikillä on ollut huomattava merkitys differentiaaliyhtälöiden teorialle ja variaatiolaskennalle, vaikka Dirichlét'n periaate nyt pystytään perustelemaan täsmällisesti Hilbertin avaruuksien teorian avulla.

[10] edellä oleva normi vastaa (SL)- yhtälön normia, kun $q \equiv 0$ ja $p(x) = x^2$. Aikaisemmin totesimme, että oletuksesta $q \geq \delta$ voidaan luopua, mutta jos funktiolla p on nollakohta tilanne muuttuu radikaalisti.