FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 8

1. Laske funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = x(2\pi - x)$ Fourier–kertoimet. (Tässä $x \in [0, 2\pi]$ ja f, $g \in L^2(0, 2\pi)$.) Pikku havainto kertoimien suppenemisnopeudesta?

2. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrinen polynomi. Laske (konvoluutio)funktion

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t) f(t) dt$$

Fourier–kertoimet $\hat{g}(m)$, $m \in \mathbf{Z}$.

3. Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja oletetaan, että sen Fourier–kertoimet toteuttavat $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$. Osoita, että $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{K}$ on jatkuva funktio (ekvivalenssiluokka L^2:ssa sisältää jatkuvan edustajan).

4. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π–periodinen funktio. Osoita:

(i) Jos f on k kertaa jatkuvasti derivoituva, niin $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

(ii) Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k-2}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$, niin f on k kertaa jatkuvasti derivoituva.

Tässä $k \in \mathbf{Z}$ ja $C > 0$ on vakio.

5. Osoita, että funktio $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) := e^{-1/(1-|x|^2)}$, kun $|x| < 1$, $f(x) = 0$, kun $|x| \geq 1$, on C^∞, eli mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva.