FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 6

1. Osoita, että funktiot $\sin(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, ovat keskenään ortogonaaliset avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$ — reaalikertoiminen tapaus, sisätulona

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \ , \quad f, g \in L^2(0, 2\pi).$$

Samoin funktioille $\cos(nx)$, $n \in \mathbf{N}_0$, ja tutki vielä lopuksi sisätuloja $\big(\sin(nx)|\cos(mx)\big)$.

2. Todista suunnikasyhtälön avulla, että avaruudet $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, eivät ole Hilbert–avaruuksia.

3. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Hilbert–avaruuden H jono. Sanomme, että (x_n) suppenee avaruudessa H *heikosti* vektoriin $x \in H$, jos kaikilla $y \in H$ pätee

$$(x_n|y) \to (x|y) \ \text{ kun } n \to \infty.$$

(i) Jos jono suppenee tavanomaisessa mielessä, osoita, että se suppenee myös heikosti.
(ii) Oletetaan, että $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono, joka suppenee vektoriin $x \in H$ heikosti, ja lisäksi pätee $\|x_n\| \to \|x\|$, kun $n \to \infty$. Osoita, että tällöin $\|x_n - x\| \to 0$, eli jono suppenee x:ään tavanomaisessa mielessä.

4. Olkoon $H := \ell^2$ sekä $e_n \in \ell^2$ tavanomainen n:s kanoninen kantavektori. Osoita, että jono $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee vektoriin $0 \in \ell^2$ heikosti.

5. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $L^2(-3, 3)$, normina $\|f\|_2 := (\int_{-3}^{3} |f(t)|^2 dt)^{1/2}$. Olkoon M aliavaruus

$$M := \{f \in L^2(-3, 3) \mid f(t) = 0 \text{ melkein kaikilla } t \in [0, 3]\}.$$

Etsi ortogonaalinen projektio $L^2(-3, 3)$:lta M:lle.
Olkoon N 1–ulotteinen aliavaruus, jonka virittää vakiofunktio 1. Etsi ortogonaalinen projektio N:lle.