FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 3

1. Tutki, ovatko annetut kuvaukset lineaarisia, hyvin määriteltyjä, rajoitettuja operaattoreita annetusta normiavaruudesta E normiavaruuteen F (Hölder!).
$S : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_{k+1})_{k=1}^{\infty}$, missä
a) $a_k := k^{-1}$, sekä $E := \ell^2$, $F := \ell^1$.
b) $a_k := k^{-1/2}$, sekä $E := \ell^5$, $F := \ell^2$.

2. Kun a ja b ovat reaalilukuja, joille $a < b$, merkitään tuttuun tapaan

$$C(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R} \text{ jatkuva} \mid \|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\}.$$

Tarkastellaan (lineaarisia) kompositio–operaattoreita $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, missä φ on jokin jatkuva reaaliarvoinen reaalimuuttujan funktio. Kun

$$\varphi(t) := \frac{1}{10}t^2,$$

osoita, että $C_\varphi : C(-3,3) \to C(-5,5)$ on hyvin määritelty ja jatkuva operaattori ko. avaruuksien välillä. Miksi C_φ ei ole surjektio kyseisissä avaruuksissa?

3. Sama tilanne kuin tehtävässä 2, mutta

$$\varphi(t) := \frac{1}{2}t.$$

Osoita, että $C_\varphi : C(0,1) \to C(0,1)$ ei ole injektio. Onko tehtävän 2 operaattori injektio?

4. Olkoon E Banach–avaruus ja $M \subset E$ sen vektorialiavaruus. (Siis M:n alkioiden lineaarikombinaatio on edelleen M:n alkio.) Oletetaan, että M on aito aliavaruus, eli $M \neq E$. Osoita, että M ei voi olla avoin E:n osajoukko.
Opastus. Tarkastele pistettä $0 \in M$; ota jokin vektori $z \in E \setminus M$. Muokkaa z:sta vektori, joka kuuluu mielivaltaiseen, ennalta annettuun 0:n ympäristöön, mutta ei ole edelleenkään M:n alkio.

5. Olkoon $1 < p < q < \infty$ (tässä p ja q eivät välttämättä ole duaalieksponentteja). Näytä, että $\ell^p \subset \ell^q$ ja

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p$$

kaikilla $x \in \ell^p$. (Ohje. Tutki ensin vektoreita x, joille $\|x\|_p = 1$.)