MATEMATIIKAN OPETUSLABORATORIO

27.1.2017:
Todennäköisyyslaskennan oleellisia kohtia lukion pitkässä oppimäärässä

ALUSTUKSIIN LIITTYVÄT KIRJALLISET TYÖT

- Mikä seuraavista vaihtoehdoista kuulostaa teistä parhaalta?

1. Alustuksiin liittyvät kirjallinen työ palautetaan vain seminaarin vetäjälle

2. **Alustuksiin liittyvistä kirjallisista töistä koostetaan yhteinen kevään 2017 opelabran ”oppimisblogi” eli kerätään kirjoitelmat yhteen ja linkitetään esim. kurssisivulle -> Jani laatii tästä ensi viikoksi ohjeet**

3. Alustuksiin liittyvät kirjalliset työt pyritään julkaisemaan artikkeleina esimerkiksi LUMAT-lehdessä

TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN SISÄLLÖT LUKION PITKÄSSÄ OPPIMÄÄRÄSSÄ

- Selailkaa oppikirjan sisältöä ja kirjan alussa esitettyä OPS:n sisältöä

  - Mitkä näyttäisivät olevan kurssin ydinsisältöä todennäköisyyslaskennan näkökulmasta?

  - Mitkä sisällöt tuntuvat teistä hankalimmilta tai kuvittelette, että ovat opiskelijoiden mielestä vaikeimpia?

YHTEISTÄ KOONTIA

- Ydinsisältöä:
  - Klassinen todennäköisyys; suotuisat tapaukset : perusjoukko
  - Jakaumat
    - Jatkuvat jakaumat (kuten erit. normaalijakauma)
    - Diskreetit jakaumat
  - Kombinatoriikkaa; kertoma, variaatio, kombinaatio

YHTEISTÄ KOONTIA

- Potentiaalisesti vaikeita asioita:
  - Jatkuvat jakaumat (irrallisuus integraalilaskennasta -> uudessa opsissa ”korjaantunut”)
  - Vaikeita kaavoja
  - Sanallisten tehtävien hahmottaminen (ja matemaattinen mallintaminen)
  - Kirjassa tosi vähän kuvia -> voi aiheuttaa haastetta lukijalle

EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS

- Miten ehdollinen todennäköisyys on kirjassa määritelty?
- Miten havainnollistaisitte sitä?
- Keksikää jokin mielestänne hyvä esimerkki (tai pohtikaa ja muovatkaa kirjan esimerkkiä) laskusta, jossa tarvitaan tietoa ehdollisesta todennäköisyydestä

YHTEISTÄ KOONTIA

- Ehdollinen todennäköisyys:
  - Kirja lähestyi tekstillä: mikä on todennäköisyys tapahtumalle B kun tiedetään, että tapahtuma A on tapahtunut P(B|A)
- Miten voi havainnollistaa?
  - Visuaalisemmin; piirretään perusjoukko ja poisottaminen
  - Arkipäivän esimerkki; tänään poutapäivä, millä todennäköisyydellä ylihuomenna sadepäivä?
  - Konkreettiset esineet

RIIPPUMATTOMUUS JA ERILLISYYS

- Mitä tarkoittaa tapahtumien riippumattomuus ja miten se määritellään kirjassa?
- Mitä tarkoittaa tapahtumien erillisyys (eli toistensa poissulkevuus) ja miten se määritellään kirjassa?
- Keksittekö esimerkkejä tapahtumista A ja B siten, että

a) A ja B ovat riippumattomat, mutta eivät erilliset?

b) A ja B eivät ole riippumattomia eikä erillisiä?

p.s. miten mahtaa käydä riippumattomuudelle, jos tapahtumat ovat erilliset?

YHTEISTÄ KOONTIA

- Riippumattomat tapahtumat:
  - Toisen tapahtuman todennäköisyys ei riipu siitä, onko toinen tapahtunut
  - P(A ja B) = P(A)P(B)
- Erilliset tapahtumat:
  - Toinen tapahtuessa toinen ei voi tapahtua, eli ovat toisensa poissulkevia
  - P(A tai B) = P(A) + P(B)

YHTEISTÄ KOONTIA

- Esimerkkejä rippumattomista tapahtumista:
  - Nopanheitto tai kolikonheitto (toistaessa), eri viikkojen lottonumero, syntyykö poika vai tyttö (kun aiemmin syntynyt esim. poika)
  - Laitatko sinä tänään punaisen paidan päälle, kun kaverikin laittoi punaisen paidan
- Käsitteet riippumattomuus ja erillisyys yhdessä ovat vaikeita: kannattaa miettiä miten näitä kannattaisi lähestyä!

DISKREETTI JAKAUMA VS. JATKUVA JAKAUMA

- Miten kirjassa on esitetty diskreetti ja jatkuva jakauma?
- Keksikää ainakin yksi (kiva konkreettinen) esimerkki sekä diskreetistä että jatkuvasta jakaumasta

YHTEISTÄ KOONTIA

- Diskreetti jakauma:
  - Mahdollisten tulosten lukumäärä on äärellinen
  - Esim: arvosanajakauma, kuinka monta kappaletta saadaan tomaattia
- Jatkuva jakauma:
  - Sellainen, jossa satunnaismuuttuja voi saada tietyltä väliltä mitkä tahansa luvut
  - Esim: kuinka monta kilogrammaa saadaan tomaattia, ihmisten pituudet

Huomio: kengän koko; kumpi? (riippuu ”tarkoituksesta”)

DISKREETIN SATUNNAISMUUTTUJAN ODOTUSARVO

- Miten voidaan laskea diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo (katsokaa kirjasta, jos ei tule heti mieleen)?

- Miten sanallistaisitte sen, mitä odotusarvo kuvaa?

YHTEISTÄ KOONTIA

- Ei ehditty katsoa yhdessä, Jani sanallistaisi seuraavasti:

- Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo saadaan kertomalla kukin satunnaismuuttujan arvo sen todennäköisyydellä ja summaamalla näin saadut arvot yhteen

- Tämä kuvaa sitä, mikä on ”odotettavissa oleva arvo” eli jos esimerkiksi heität noppaa, odotusarvo on 3,5. Jos haluat saada mahdollisimman suuren silmäluvun, jos saat suuremman luvun kuin 3,5 kävi ”keskimääräistä parempi tuuri” ja jos sait alle 3,5 kävi ”keskimääräistä huonompi tuuri” -> pitkään heittäessäsi saamiesi silmälukujen keskiarvo lähestyy lukua 3,5

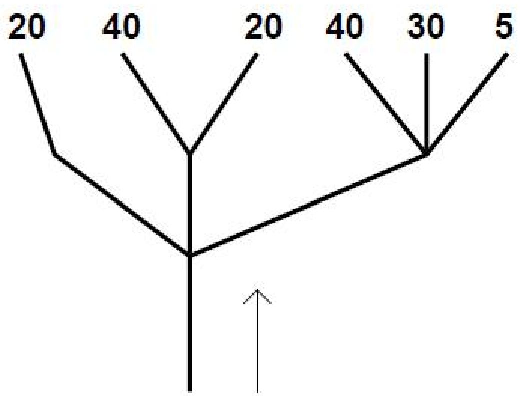
- Tähän auttaa varmasti paljon piirtää jakauma!

YLIOPPILASKOETEHTÄVÄ, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ, SYKSY 2011

8. Eräässä tietokonepelissä pelaaja etenee ylimmälle tasolle oheisen kaavion mukaisesti ja saa kaavioon merkityn pistemäärän. Jokaisessa risteyksessä hän valitsee satunnaisesti yhden tasavertaisista vaihtoehdoista ja etenee seuraavalle tasolle ylöspäin.

a) Millä todennäköisyydellä pelaaja saavuttaa suurimman pistemäärän 40?

b) Määritä pistemäärän odotusarvo.



YLIOPPILASKOETEHTÄVÄ, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ, SYKSY 2011

8. **a)** Jos polku haarautuu kahtia, kummankin haaran todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ ja jos haarautuu kolmeen osaan, kunkin todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Tällöin 40:n todennäköisyys on $P(40) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$.

b) Muiden pistemäärien todennäköisyyksiksi saadaan

$P(5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $P(20) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $P(30) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Odotusarvo on $E = \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{9} \cdot 30 + \frac{5}{18} \cdot 40 = \frac{450}{18} = 25$.

Vastaus: **a)** $\frac{5}{18}$, **b)** 25.

BINOMIJAKAUMA JA BINOMITODENNÄKÖISYYS

- Oletetaan, että jonkin tapahtuman todennäköisyys on joka päivä 50 % (riippumatta muista päivistä).

  - Millä todennäköisyydellä tapahtuma tapahtuu neljän peräkkäisen päivän ajan joka päivä?

  - Millä todennäköisyydellä tapahtuma ei tapahdu neljän peräkkäisen päivän aikana kertaakaan?

  - Millä todennäköisyydellä tapahtuma tapahtuu neljän päivän aikana tasan kerran?

BINOMIJAKAUMA JA BINOMITODENNÄKÖISYYS

- Miten kirjassa esitetään binomitodennäköisyyden kaava?
- Miltä edellisen esimerkin todennäköisyysjakauma näyttää graafisesti?

YHTEISTÄ KOONTIA

- Ei ehditty käydä yhdessä:

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

- Näitä pistetodennäköisyyksiä voisi varmasti havainnollistaa yksinkertaisella esimerkillä, kuten juuri miettimällä edellä esitettyä simppeliä esimerkkiä

YLIOPPILASKOETEHTÄVÄ, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ, SYKSY 2012

8. Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.

a) Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot?

b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?

c) Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo.

YLIOPPILASKOETEHTÄVÄ, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ, SYKSY 2012

8. **a)** Merkitään $P(n)$:llä todennäköisyyttä sille, että professori pitää viikossa n luentoa. Tällöin $P(5) = 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

b) Kysytty todennäköisyys on $P(4) = \binom{5}{4} 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

c) Lasketaan muiden luentomäärien todennäköisyydet.

$$P(0) = 0{,}2^5 = 0{,}00032, \qquad P(1) = \binom{5}{1} 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064,$$

$$P(2) = \binom{5}{2} 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512, \; P(3) = \binom{5}{3} 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048.$$

Odotusarvo $E = 0P(0) + P(1) + 2P(2) + 3P(3) + 4P(4) + 5P(5) = 4.$

Vastaus: **a)** 0,33, **b)** 0,41, **c)** 4.