ERÄS TÄRKEÄ NÄKÖKULMA JOUKKOJEN LEBESGUE-MITALLISUUTEEN

Carathéodoryn ehto kertoo, että Lebesgue-mitallisilla joukoilla on tärkeä universaaliominaisuus. Lebesgue-mitallisten joukkojen määritelmä Carathéodoryn ehdon avulla antaa välittömästi sen, että Lebesgue-mittaa ei voida laajentaa suurempaan σ-algebraan menettämättä ehdon kuvaamaa mitallisen joukon 'yhteensopivuutta' mielivaltaisten osajoukkojen kanssa.

Tämä mitallisuuden määritelmä ei kuitenkaan ole ainut luonteva, eikä se välttämättä ole edes kaikkein intuitiivisin. Palautetaan mieleen, että jokaisella joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ on olemassa jono (E_i) avoimia joukkoja siten että $A \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i$ ja $m^*(A) = m^*(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i)$ (esim. Lause 1.29). Entäpä, voidaanko mitallisia joukkoja approksimoida ulkomitan mielessä sisältäpäin suljettujen joukkojen numeroituvilla yhdisteillä? (Muistettakoon että avoimien joukkojen leikkauksen komplementti on suljettujen joukkojen yhdiste, joten tällaisten joukkojen voidaan ajatella olevan duaalisessa asemassa.)

Voidaanko joukon $A \subset [0,1]$ volyymiä arvioida mielekkäästi kaavalla $1 - m^*([0,1]\setminus A)$? Seuraavassa määritelmässä halutaan laajentaa tämä tarkastelu rajoitetuista osajoukoista (esim. $[0,1]$) koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 1. *Määritellään funktio $m_*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ seuraavasti:*

$$m_*(A) = \limsup_{i\to\infty} m^*([-i,i]^n) - m^*([-i,i]^n \setminus A), \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Funktiota m_* kutsutaan Lebesguen sisämitaksi.

Propositio 1. *Jokaisella $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_*(A) \le m^*(A)$.*

Tod. HT.

Lause 1. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$, $m^*(E) < \infty$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) Joukko E toteuttaa Carathéodoryn ehdon (eli on mitallinen).

(2) $m_*(E) = m^*(E)$.

(3) $m^*([-i,i]^n \cap E) + m^*([-i,i]^n \setminus E) = m([-i,i]^n)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

(4) Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa joukkojen E ja $\mathbb{R}^n \setminus E$ Lebesguen peitteet $\mathcal{F}_E$ ja $\mathcal{F}_{E^c}$, joille $m^*(\bigcup \mathcal{F}_E \cap \bigcup \mathcal{F}_{E^c}) < \epsilon$.

Todistus. (1) $\Longrightarrow$ (3):

$$m^*([-i,i]^n \cap E) + m^*([-i,i]^n \setminus E) = m^*([-i,i]^n), \quad i \in \mathbb{N},$$

missä sovellettiin Carathéodoryn ehtoa valinnalla $A = [-i,i]^n$.
(3) $\Longrightarrow$ (2):

$$\begin{aligned} m_*(E) &= \limsup_{i\to\infty} m^*([-i,i]^n) - m^*([-i,i]^n \setminus E) \\ &= \limsup_{i\to\infty} m^*([-i.i]^n \cap E) = m^*(E). \end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö pätee yleisille osajoukoille $E \subset \mathbb{R}^n$ ja on HT (muista Lemma 1.27, Lause 1.59). Huomaa että suunta '$\le$' on selvä. Hae vastakkaisessa arviossa osajoukoille $E \cap ([-i-1, i+1]^n \setminus$

$[-i,i]^n$), $i = 0,1,2,...$ erikseen sopivat Lebesguen peitteet ja yhdistä näistä E:n Lebesguen peite.
(2) $\Longrightarrow$ (3):HT (Muista Lemma 1.27, Lause 1.39)
(3) $\Longrightarrow$ (4):
Huomataan että Lebesgue-mitallisille joukoille $A, B \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$m(A) + m(B) - m(A \cup B)$$

$$= m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) - (m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B)) = m(A \cap B).$$

Käyttämällä ehtoa (3) ja ylläolevien harjoitustehtävien ideaa nähdään, että jokaisella $\epsilon > 0$ ja $i = 0,1,2,...$ on olemassa joukkojen E ja $\mathbb{R}^n \setminus E$ Lebesguen peitteet $\mathcal{F}_E$ ja $\mathcal{F}_{E^c}$, joille pätee $m^*((\bigcup \mathcal{F}_E \setminus E) \cap ([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n)) < 2^{-i-2}\epsilon$ ja $m^*((\bigcup \mathcal{F}_{E^c} \setminus E^c) \cap ([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n)) < 2^{-i-2}\epsilon$ kaikilla $i = 0,1,2,....$ Huomaa, että kokoelma

$$\{A \cap [-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n : \ A \in \mathcal{F}_E \cup \mathcal{F}_{E^c}\}$$

koostuu mitallisista joukoista ja on joukon $[-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n$ Lebesguen peite. Siis

$$\begin{aligned}
& m(([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \cap \bigcup \mathcal{F}_E \cap \bigcup \mathcal{F}_{E^c}) \\
= \ & m(([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \cap \bigcup \mathcal{F}_E) + m(([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \cap \bigcup \mathcal{F}_{E^c}) \\
- \ & m(([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \cap (\bigcup \mathcal{F}_E \cup \mathcal{F}_{E^c})) \\
\leq \ & m^*(([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \cap E) + 2^{-i-2}\epsilon + m^*(([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \setminus E) + 2^{-i-2}\epsilon \\
- \ & m^*([-i-1,i+1]^n \setminus [-i,i]^n) \\
\leq \ & 2^{-i-1}\epsilon.
\end{aligned}$$

Viimeisessä arviossa käytettiin ehtoa (3). Tästä saadaan väite yhdistelemällä taas sopivasti peitteitä.
(4) $\Longrightarrow$ (1):
Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Haluamme näyttää, että $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Epäyhtälö $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$ pätee tunnetusti, ja haluamme siis näyttää, että $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Riittää näyttää väite tapauksessa, että $A \subset [-i,i]^n$, missä $i \in \mathbb{N}$, ja siirrymme tarkastelemaan perusjoukkoa $[-i,i]^n$. Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $\mathcal{F}_A$ joukon A Lebesguen peite, jolle $m(\bigcup \mathcal{F}_A) < m^*(A) + \epsilon$ ja olkoon $\mathcal{F}_E$ ja $\mathcal{F}_{E^c}$ kuten edellisessä kohdassa (mutta rajoitettuna tarkasteltavaan kuutioon $[-i,i]^n$), eli siis $m(\bigcup \mathcal{F}_E \cap \bigcup \mathcal{F}_{E^c}) < \epsilon$ (ehto (4)). Arvioidaan

$$\begin{aligned}
m^*(A) + \epsilon \quad > \quad & m(\bigcup \mathcal{F}_A) \geq m(\bigcup \mathcal{F}_A \cap \bigcup \mathcal{F}_E) + m(\bigcup \mathcal{F}_A \cap \bigcup \mathcal{F}_{E^c}) - \epsilon \\
\geq \quad & m^*(A \cap \bigcup \mathcal{F}_E) + m^*(A \cap \bigcup \mathcal{F}_{E^c}) - \epsilon \\
\geq \quad & m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Antamalla $\epsilon \to 0$ saamme väitteen. $\square$

Kirjallisuutta jossa käsitellään mitallisia joukkoja sisämittojen ja ulkomittojen avulla:

Frank Jones, Lebesgue Integration on Euclidean Space, Jones and Bartlett Publishers Inc. 1993.
Paul Halmos, Measure Theory (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag, 1978.