MITTA JA INTEGRAALI - HARJOITUS 6 MALLIT

1. Laske
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\sin(nx)e^{-nx^2}\,dx.$$

Ratkaisu: Arvioidaan
$$\left|\int_{-n}^{n}\sin(nx)e^{-nx^2}\,dx\right|\le\int_{\mathbb{R}}e^{-nx^2}\,dx\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Monisteen laskelmien mukaan e^{-x^2} on integroituva $\mathbb{R}$:ssä ja toisaalta $f_n = e^{-nx^2}$ on laskeva jono jatkuvia funktioita. Huomataan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ m.k. Tehtävän 3 mukaan $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Siis kysytty raja-arvo on 0.

2. Olkoon $A\subset\mathbb{R}$ kompakti joukko ja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integroituva funktio. Merkitään $A+n=\{a+n:\ a\in A\}$ jokaisella $n\in\mathbb{N}$. Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty}\int_{A+n} f = 0.$$

Ratkaisu: Riittää näyttää, että $\lim_{n\to\infty}\int|f\chi_{A+n}| = 0$. Koska f on integroituva, pätee $\int|f|<\infty$. Toisaalta $0\le|f\chi_{A+n}|\le|f|$ jokaisella $n\in\mathbb{N}$. Siis DKL:n oletukset voimassa ja siis $\lim_{n\to\infty}\int|f\chi_{A+n}| = \int\lim_{n\to\infty}|f\chi_{A+n}|$, mikäli oikeanpuoleinen raja-arvo on olemassa melkein kaikkialla. Väitämme, että $\lim_{n\to\infty}|f(x)\chi_{A+n}(x)| = 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Koska A on kompakti, se sisältyy johonkin väliin $[-i,i]$. Jos $n>|x|+i$, niin $x\notin A+n$, siis $\chi_{A+n}(x)=0$ ja niinpä $\lim_{n\to\infty}|f\chi_{A+n}(x)|=0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$.

3. Näytä 'laskeva versio' monotonisen konvergenssin lauseesta: Jos $f_1\ge f_2\ge f_3\ge\dots$ on jono mitallisia positiivisia funktioita $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ja f_1 on integroituva, niin
$$\lim_{i\to\infty}\int f_i = \int\lim_{i\to\infty} f_i.$$

Ratkaisu: Havaitaan, että $0\le f_1-f_2\le f_1-f_3\le f_1-f_4\le\dots$. Siis soveltamalla MKL saadaan
$$\int f_1 - \int\lim_{n\to\infty} f_n = \int(f_1-\lim_{n\to\infty} f_n) = \int\lim_{n\to\infty}(f_1-f_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int f_1-f_n = \int f_1 - \lim_{n\to\infty}\int f_n.$$

Koska $0 \leq \int f_1 < \infty$, voidaan tästä päätellä, että $\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

Vaihtoehtoinen tapa on soveltaa suoraan DKL.

4. Laske
$$\int_{x=(x_1,x_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \sin(x_1)e^{-x_2^2}\ dx.$$

Funktion $x \mapsto \sin(x_1)e^{-x_2^2}$ itseisarvolla on majorantti $x \mapsto e^{-x_2^2}$, jonka näytämme olevan integroituva yli joukon $[0,1]\times\mathbb{R}$. Monisteessa on näytetty, että $\int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\ dx_2 = \sqrt{\pi}$. Siis positiivinen Fubinin lause antaa, että

$$\int_{x=(x_1,x_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\ dx = \int_{[0,1]}\int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\ dx_2\ dx_1 = \int_{[0,1]} \sqrt{\pi}\ dx_1 = \sqrt{\pi}.$$

Niinpä mainittu majorantti on integroituva. Siis voidaan soveltaa vaihtuvamerkkistä Fubinin lausetta ja saadaan

$$\int_{x=(x_1,x_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \sin(x_1)e^{-x_2^2}\ dx = \int_{[0,1]} \sin(x_1)\int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\ dx_2\ dx_1$$

$$= \int_{[0,1]} \sin(x_1)\sqrt{\pi}dx_1 = \sqrt{\pi}\Big|_0^1 - \cos(x_1) = \sqrt{\pi}(1-\cos(1)).$$

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ kun $0 < x < 1,\ y > 1$ ja $f(x,y) = 0$ muulloin. Totea, että

$$\int_0^1 (\int_1^\infty f(x,y)\ dy)dx > 0, \qquad \int_1^\infty (\int_0^1 f(x,y)\ dx)dy < 0.$$

Miten tämä liittyy Fubinin lauseeseen?

Ratkaisu: Muistetaan, että $e^{-x} > e^{-2x}$ jokaisella $x > 0$. Lasketaan

$$\int_1^\infty f(x,y)\chi_{[1,a]}\ dy = (R)\int_1^a f(x,y)\ dy = \Big|_1^a - \frac{1}{x}e^{-xy} + \frac{1}{x}e^{-2xy}\ dy, \quad a > 1.$$

Havaitaan, että tämä suppenee alhaalta kohti arvoa $\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-2x}$ kun $a \to \infty$, jokaisella $x \in (0,1)$. Toisaalta, jokaisella $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ pätee

$$\int_0^1 f(x,y)\chi_{[\epsilon,1]}\ dx = (R)\int_\epsilon^1 f(x,y)\ dx = \Big|_\epsilon^1 - \frac{1}{y}e^{-xy} + \frac{1}{y}e^{-2xy}\ dx.$$

Kun $\epsilon \to 0^+$ suppenee tämä ylhäältä kohti arvoa $-\frac{1}{y}e^{-y} + \frac{1}{y}e^{-2y}$. Soveltamalla näitä havaintoja ja monotonisen konvergenssin lausetta sopivasti hajotelmaan $f = f^+ - f^-$, saadaan siis, että

$$\int_0^\infty f(x,y)\ dy = \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-2x}, \quad \int_0^1 f(x,y)\ dx = -\frac{1}{y}e^{-y} + \frac{1}{y}e^{-2y}.$$

Tästä jatkamme eteenpäin soveltamalla edelleen huolettomasti Riemann-integrointia + MKL:tta 'epäoleellisen Lebesgue-integroinnin' yhteydessä:

$$\int_0^1 (\int_1^\infty f(x,y)\ dy)dx = \int_0^1 \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-2x}dx > 0,$$

$$\int_1^\infty (\int_0^1 f(x,y)\ dx)dy = \int_1^\infty \frac{1}{y}e^{-2y} - \frac{1}{y}e^{-y}\ dy < 0.$$

(Yllä l'Hospital $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-2x} = 0$.) Huomaa, että Fubinin lauseen johtopäätös ei ole voimassa, mikä johtuu siitä, että f ei ole positiivinen eikä $|f|$ ole integroituva. Tämä nähdään seuraavaan tapaan

$$\int_{\{(x,y)\in(0,1)\times(1,\infty):\ f(x,y)<-2^{-1}\}} -f(x,y) \geq \int_{\{(x,y)\in(0,1)\times(1,\infty):\ f(x,y)<-2^{-1}\}} 2^{-1}$$

ja voidaan tarkastaa, että

$$m_2(\{(x,y)\in(0,1)\times(1,\infty):\ f(x,y) < -2^{-1}\}) = \infty.$$

6. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiivinen mitallinen kuvaus ja merkitään $\phi(t) = m(\{x\in\mathbb{R}^n:\ f(x) > t\})$ jokaisella $t\in[0,\infty)$. Osoita, että

$$\int_0^\infty \phi(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

[Vihje: Fubini.]

Ratkaisu: Määritellään $g\colon \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x,t) = 1$ kun $f(x) > t$ ja $g(x,t) = 0$ kun $f(x) \leq t$ jokaisella $x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,\infty)$. Nyt g on mitallinen koska joukko

$$g^{-1}(1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} f^{-1}((\frac{k+1}{n},\infty)) \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$$

on mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä mitallinen. Huomaa, että $f(x) = s > t$ jos ja vain jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, joille $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} < s$ ja $x \in f^{-1}((\frac{k+1}{n}, \infty))$. Koska g on mitallinen ja positiivinen, voimme Fubinin positiivisen version nojalla puhua mielekkäästi kaksinkertaisista integraaleista, joita esiintyy alla. Havaitaan ensin, että

$$\int_0^\infty g(x,t)\ dt = \int_0^{f(x)} 1\ dt = f(x)$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ ja siis

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty g(x,t)\ dt\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx.$$

Seuraavaksi sovelletaan Fubini positiivisille funktioille, josta saadaan, että ylläolevan integraalin arvo on

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} g(x,t)\ dx\ dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n:\ f(x) > t\}}\ dx\ dt = \int_0^\infty \phi(t)\ dt.$$