MITTA JA INTEGRAALI - HARJOITUS 5 MALLIT

1. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko, $m(E) < \infty$ ja olkoon $f\colon E \to \mathbb{R}$ rajoitettu mitallinen positiivinen kuvaus. Tarkista että

$$m(E) \inf_{x \in E} f(x) \leq \int_E f \ \leq m(E) \sup_{x \in E} f(x).$$

Ratkaisu: Olkoon $a = \inf_{x \in E} f(x)$ ja $b = \sup_{x \in E} f(x)$. Tällöin $a\chi_E \leq f\chi_E \leq b\chi_E$. Integraalin monotonisuudesta saadaan

$$am(E) = \int_E a\chi_E \leq \int f\chi_E = \int_E f \leq \int b\chi_E = bm(E).$$

2. Onko olemassa sellaista mitallista funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f > 0$, että f ja $\frac{1}{f}$ ovat integroituvia yli $\mathbb{R}$:n.

Ratkaisu: Ei. Oletetaan, että f on posiitivinen integroituva funktio. Kirjoitetaan $A = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > 1\}$. Tällöin

$$m(A) = \int \chi_A \leq \int f < \infty.$$

Toisaalta

$$\int \frac{1}{f} \geq \int \chi_{\mathbb{R} \setminus A} = m(\mathbb{R} \setminus A) = \infty.$$

Viimeinen yhtäsuuruus pätee koska $m(\mathbb{R} \setminus A) + m(A) = m(\mathbb{R}) = \infty$.

3. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja ja $1 \leq k \leq n$. Oletamme, että jokainen piste $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu korkeintaan k:n moneen joukkoon A_i. Näytä että joukolle $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ on voimassa arvio

$$m(A) \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

[Vihje: Kirjoita karakterististen funktioiden avulla ja integroi.]

Ratkaisu: Oletuksista seuraa, että

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x) \leq k \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow m(A) = \int \chi_A \geq \int \chi_A \cdot \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \int \chi_{A_i} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

4. Laske raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\,dx$, missä $0 < s < 1$.

Ratkaisu: Funktiot $f_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{nx^s}{1+nx}$ ovat jatkuvia, siis mitallisia ja $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Monotonisen konvergenssin lause antaa, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^1 x^{s-1}.$$

Jokaisella $\epsilon > 0$ pätee

$$\int_\epsilon^1 x^{s-1} = (R)\int_\epsilon^1 = \Big|_\epsilon^1 \frac{1}{s} x^{s-1}.$$

Soveltamalla MKL uudestaan ja antamalla $\epsilon \to 0^+$ saadaan vastaus $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \Big|_0^1 \frac{1}{s} x^{s-1} = \frac{1}{s}$.

5. Olkoon $E_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, mitallisia ja erillisiä joukkoja, sekä $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja positiivinen. Osoita, että

$$\int_{\bigcup_i E_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f.$$

Ratkaisu: Koska f on mitallinen ja joukot E_i ovat mitallisia, on $f\chi_{E_i}$ mitallinen jokaisella $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\bigcup E_i} f = \int f\chi_{\bigcup E_i} = \int \sum_{i\in\mathbb{N}} f\chi_{E_i} = \int \lim_{i\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\chi_{E_i}$$

ja soveltamalla MKL on ylläoleva edelleen

$$= \lim_{n\to\infty} \int \sum_{i=1}^{n} f\chi_{E_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int f\chi_{E_i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{E_i} f.$$

6. Olkoon $1 \leq p < \infty$, ja $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$, mitallisia kuvauksia. Oletamme lisäksi, että on olemassa $\lim_{i\to\infty} f_i(x) := f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja että on olemassa sellainen vakio $M < \infty$, jolle

$$\int |f_i|^p \leq M \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että $\int |f|^p \leq M$. [Vihje: Fatoun lemma puree.]

Ratkaisu: Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ on $|f_i|$ mitallinen mitallisen ja jatkuvan kuvauksen yhdisteenä $x \mapsto f_i(x) \mapsto |f_i(x)|$. Lisäksi $\lim_{i\to\infty} |f_i|^p = |f|^p$. Siis käyttämällä Fatoun lemmaa saadaan

$$\int |f|^p = \int \liminf_{i\to\infty} |f_i|^p \leq \liminf_{i\to\infty} \int |f_i|^p \leq \liminf_{i\to\infty} M = M.$$