MITTA JA INTEGRAALI - HARJOITUS 4 MALLIT

1. Laske $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n + \frac{1}{n}$ ja $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n + \frac{1}{n}$.

Ratkaisu: Selvästi $\sup_{n\geq k}(-1)^n + \frac{1}{n}$ on $1+\frac{1}{k}$ jos k parillinen ja $1+\frac{1}{k+1}$ jos k pariton. Kumpikin termi suppenee kohti arvoa 1 kun $k\to\infty$. Siis $\limsup_{k\to\infty}(-1)^n + \frac{1}{n} = \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}(-1)^n + \frac{1}{n} = 1$.

Jokaisella $k\in\mathbb{N}$ pätee $\inf_{n\geq k}(-1)^n + \frac{1}{n} = -1$. Siis $\liminf_{k\to\infty}(-1)^n + \frac{1}{n} = \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k}(-1)^n + \frac{1}{n} = -1$.

2. Olkoot $(x_n),(y_n)\subset\mathbb{R}$ rajoitettuja jonoja. Näytä että

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

Ratkaisu: Ehto että jonot ovat rajoitettuja takaa että ei synny termejä muotoa $\infty-\infty$, jotka eivät ole määriteltyjä. Huomaa, että $\sup_{i\geq n} y_i \leq \sup_{i\geq k} y_i$ ja $\inf_{i\geq n} y_i \geq \inf_{i\geq k} y_i$ kun $n\geq k$. Arvioidaan seuraavasti:

$$\limsup_{k\to\infty}(x_k+y_k) = \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}(x_n+y_n) \leq \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}(x_n+\sup_{i\geq n} y_i) \leq \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}(x_n+\sup_{i\geq k} y_i)$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\sup_{n\geq k} x_n + \sup_{i\geq k} y_i) = \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k} x_n + \lim_{k\to\infty}\sup_{i\geq k} y_i = \limsup_{k\to\infty} x_n + \limsup_{k\to\infty} y_n$$

ja

$$\liminf_{k\to\infty}(x_k+y_k) = \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k}(x_n+y_n) \geq \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k}(x_n+\inf_{i\geq n} y_i) \geq \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k}(x_n+\inf_{i\geq k} y_i)$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\inf_{n\geq k} x_n + \inf_{i\geq k} y_i) = \lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k} x_n + \lim_{k\to\infty}\inf_{i\geq k} y_i = \liminf_{k\to\infty} x_n + \liminf_{k\to\infty} y_n.$$

3. Olkoot $F_\sigma = \{\bigcup_{i=1}^\infty F_i : \ F_i\subset\mathbb{R}^n$ suljettu $\forall i\in\mathbb{N}\}$ ja $G_\delta = \{\bigcap_{i=1}^\infty V_i : V_i\subset\mathbb{R}^n$ avoin $\forall i\in\mathbb{N}\}$. Osoita, että nämä joukot sisältyvät $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukkoihin.

Ratkaisu: Palautetaan mieleen että $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n osajoukkojen σ-algebra joka sisältää suljetut joukot. Koska avoin joukko on suljetun joukon komplementti ja σ-algebra sisältää jäsentensä komplementit, saadaan, että kokoelmaan $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ sisältyvät myös avoimet joukot. Olkoon $F_i\subset\mathbb{R}^n$ suljettu joukko jokaisella $i\in\mathbb{N}$. Tällöin $F_i\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ jokaisella i ja siten

$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$, koska $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ sisältää σ-algebrana jäsentensä numeroituvat leikkaukset. Tarkastellaan avoimia joukkoja $V_i \subset \mathbb{R}^n$ missä $i \in \mathbb{N}$. Vastaavasti $V_i \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ jokaisella i ja $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$, sillä $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$ sisältää σ-algebrana jäsentensä numeroituvat yhdisteet. Siis $F_\sigma, G_\delta \subset \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^n)$.

4. Olkoot $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallisia kuvauksia. Näytä että tulokuvaus fg on mitallinen.

Ratkaisu: Olkoon $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2; v(x) = (f(x), g(x))$. Lauseen 2.10 mukaan v on mitallinen. Olkoon $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(s,t) = st$. Tämä on jatkuva kuvaus (Analyysi I). Nyt $fg = u \circ v$ on mitallinen kuvaus lauseen 2.9 mukaan.

5. Näytä että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen jos $f^{-1}((-\infty, q))$ on mitallinen jokaisella $q \in \mathbb{Q}$.

Ratkaisu: Käytämme monisteen lausetta 2.12, jonka mukaan f on mitallinen jos joukko $E''_a = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \leq a\}$ on mitallinen jokaisella $a \in \mathbb{R}$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Valitaan jono $(q_n) \subset \mathbb{Q}$, siten että $q_1 > q_2 > q_3 > \ldots > q_n \to a$ kun $n \to \infty$. Havaitaan että $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu joukkoon E''_a jos ja vain jos $x \in f^{-1}((-\infty, q_n))$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siis E''_a on $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, q_n))$, joka on siis numeroituva leikkaus oletuksen mukaan mitallisista joukoista ja siten mitallinen. Lauseen 2.12. sovellus antaa että f on mitallinen funktio.

6. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaus. Osoita, että kuvauksen f jatkuvuuspisteiden joukko $A = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f \text{ jatkuva pisteessa } x\}$ on Lebesgue-mitallinen. [Ohje: verifioi että A on leikkaus joukoista

$$G_k = \bigcup \{G \subset \mathbb{R}^n :\ G \text{ avoin},\ |f(x) - f(y)| < \frac{1}{k}\ \forall x, y \in G\}.]$$

Ratkaisu: Käytämme ohjeen joukkoja $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$.

Palautetaan mieleen funktion jatkuvuuden määritelmä: f on jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$ jolle $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ (merkitsemme tässä sekä $\mathbb{R}^n$:n että $\mathbb{R}$:n avointa kuulaa samalla symbolilla B). Oletetaan, että f on epäjatkuva pisteessä $z \in \mathbb{R}^n$. Tämä tarkoittaa sitä että on olemassa $\epsilon > 0$ jolle $f(B(z,\delta)) \not\subset B(f(z), \epsilon)$ kaikilla $\delta > 0$. Tämä voidaan myös kirjoittaa $\sup_{y \in f(B(z,\delta))} |f(z) - y| \geq \epsilon$ jokaisella $\delta > 0$, erityisesti $\sup_{v,w \in f(B(z,\delta))} |v - w| \geq \epsilon$ jokaisella $\delta > 0$. Tämä tarkoittaa edelleen sitä että jokaisella avoimella joukolla $G \subset \mathbb{R}^n$, jolla $z \in G$ pätee että $\sup_{v,w \in f(G)} |v - w| \geq \epsilon$. Valitsemalla $k \in \mathbb{N}$, jolle $\frac{1}{k} < \epsilon$, saadaan että $z \notin G_k$. Siis $z \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ ja koska z oli mielivaltainen epäjatkuvuuspiste saadaan $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$.

Olkoon $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan $k \in \mathbb{N}$ jolle $\frac{1}{k} < \epsilon$. Nyt on olemassa avoin joukko $U \in G_k$ siten että $x \in U$. Siis $\sup_{v,w \in f(U)} |v - w| < \frac{1}{k} < \epsilon$. Olkoon $\delta > 0$ siten että $B(x, \delta) \subset U$. Nyt $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \frac{1}{k}) \subset B(f(x), \epsilon)$. Siis f on jatkuva pisteessä x ja saamme että $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$.

Seuraavaksi analysoimme joukkoa $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. Jokainen G_k on yhdiste avoimista joukoista, siis itsekin avoin. Niinpä jokainen G_k on mitallinen. Huomaamme että $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ on mitallinen joukko koska se on mitallisten joukkojen numeroituva leikkaus.