MITTA JA INTEGRAALI - HARJOITUS 3 MALLIT

1. Olkoon $A = \{(s,t) \in [-1,1]^2 : \ s^2 + t^2 > 1\}$.

(i) Onko A mitallinen mitan m_2 suhteen?

(ii) Laske $m_2^*(A)$.

Ratkaisu: (i) Joukot $\overline{B}(\overline{0},1)$ ja $[-1,1]^2$ ovat suljettuja, siis mitallisia. Niinpä $A = [-1,1]^2 \setminus \overline{B}(\overline{0},1)$ on mitallinen.

(ii) Monisteen sivulla 33 on huomio, että Riemann-integroinnin tekniikoilla saadut pinta-ala ja tilavuuskaavat ovat voimassa. Analyysin I/II kurssien perusteella siis $m_2(A) = 4 - \pi$. (Vaihtoehtoisesti voi käyttää samaa tekniikkaa kuin tehtävän 2 ratkaisussa.)

2. Olkoon $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \ s \in [0,1], \ 0 \leq t < e^s\}$.

(i) Onko A mitallinen mitan m_2 suhteen?

(ii) Laske $m_2^*(A)$.

Ratkaisu: Olkoon $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \ f(t) = e^t$ jokaisella $t \in [0,1]$. Olkoon d välin $[0,1]$ jako (muotoa $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$). Olkoon $\underline{\mathcal{F}}_d = \{[0,x_2] \times [0, f(0)), [x_2,x_3] \times [0, f(x_1), \ldots, [x_{n-1},1] \times [0, f(x_{n-1}))\}$ ja $\overline{\mathcal{F}}_d = \{[0,x_2] \times [0, f(x_1)), [x_2,x_3] \times [0, f(x_2), \ldots, [x_{n-1},1] \times [0,1))\}$. Tällöin $\bigcup \underline{\mathcal{F}}_d \subset A \subset \overline{\mathcal{F}}_d$. Käytämme tietoa, että f on Riemann-integrorituva välillä $[0,1]$. Riemann-integroinnin teoriasta seuraa että $\sup_d \ell(\underline{\mathcal{F}}_d) = \inf_d \ell(\overline{\mathcal{F}}_d) = (R) \int_0^1 f(t) \ dt$ Välttämättä tämä on m_2^*, sillä $\ell(\underline{\mathcal{F}}_d) \leq m_2^*(A) \leq \ell(\overline{\mathcal{F}}_d)$ jokaisella jaolla d. Siis $m_2^*(A) = (R) \int_0^1 f(t) \ dt = e^1 - 1$.

Joukko A on mitallinen tehtävän 4 perusteella.

3. Näytä että $m_*(A) \leq m^*(A)$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$.

(Katso lisämateriaali kurssin nettisivuilla.)

Ratkaisu: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Subadditiivisuus, termien uudelleen järjestely ja ulkomitan monotonisuus antaa

$$m^*([-i,i]^n) - m^*([-i,i]^n \setminus A) \leq m^*([-i,i]^n \cap A) \leq m^*(A) \ \forall \ i \in \mathbb{N}.$$

Ottamalla puolittain $\limsup_{i \to \infty}$ ja muistamalla sisämitan määritelmä saadaan $m_*(A) \leq m^*(A)$.

4. Näytä Lause 1.64: $E \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa Lebesgue-mitalliset $A, B \subset \mathbb{R}^n$ siten että $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \epsilon$.

Ratkaisu: Olkoon $\epsilon > 0, \ A \subset E \subset B$, joille $m(B \setminus A) < \epsilon$ ja olkoon $F \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Huomataan että

$$m^*(F \cap E) \leq m^*(F \cap A) + m^*(E \setminus A) \leq m^*(F \cap A) + \epsilon.$$

Käyttämällä A:n mitallisuutta saadaan $m^*(F) = m^*(F \cap A) + m^*(F \setminus A)$. Nyt $m^*(F) \geq m^*(F \cap E) - \epsilon + m^*(F \setminus E)$. Antamalla $\epsilon \to 0$ saadaan että $m^*(F) \geq m^*(F \cap E) + m^*(F \setminus E)$ pätee mielivaltaisella $F \subset \mathbb{R}^n$. Koska subadditiviisuuden nojalla aina pätee $m^*(F) \leq m^*(F \cap E) + m^*(F \setminus E)$, saadaan väite.

5. Anna esimerkki joukosta $A \subset \mathbb{R}^n$ joka ei ole mitallinen mitan m_n suhteen.

Ratkaisu: Merkitään A_1 monisteen sivulla 34 olevaa joukkoa $A \subset [0,1]$. Määrittelemme uudelleen $A = A_1 \times [0,1]^{n-1}$. Tällöin A on mitan m_n suhteen ei-mitallinen.

Tehdään vastaoletus, että A on mitallinen. Käyttämällä monisteen argumenttia saadaan suoraan, että joukot $A + (r, 0, 0, , \ldots, 0)$, $r \in \mathbb{Q}$, ovat keskenään pistevieraita (eri arvoilla $r \in \mathbb{Q}$). Siis erityisesti sama pätee joukoille $A + (\frac{1}{n}, 0, 0, , \ldots, 0) \subset [0,2] \times [0,1]^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Käyttämällä Lebesguen mitan perusominaisuuksia saadaan

$$2 \geq m_n(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A + (\frac{1}{n}, 0, 0, \ldots, 0)) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n(A + (\frac{1}{n}, 0, 0, \ldots, 0)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n(A).$$

Päättelemme tästä että $m_n(A) = 0$. Samoin kuin monisteessa, saamme $\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A + (r, 0, 0, \ldots, 0)$. Siis

$$\infty = m_n(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1}) = m_n(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A + (r, 0, 0, \ldots, 0))$$

$$= \sum_{r \in \mathbb{Q}} m_n(A + (r, 0, 0, \ldots, 0)) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} m_n(A) = 0,$$

josta saamme ristiriidan. Siis A on ei-mitallinen.

6. Näytä Borel-Cantelli lemma: Olkoon (Ω, Σ, μ) mitta-avaruus, $(E_n) \subset \Sigma$ jono μ-mitallisia joukkoja ja

$$E = \{x \in \Omega : \#\{j \in \mathbb{N} : x \in E_j\} = \infty\}.$$

(Yllä # on joukon mahtavuus.) Tällöin ehdosta $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(E_j) < \infty$ seuraa että $\mu(E) = 0$. (Vihje: Tarkista ensin että $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j$.)

Ratkaisu: $x \in E$ joss $\forall i \in \mathbb{N}\ \exists\ j \in \mathbb{N}$ s.e. $i \leq j$ ja $x \in E_j$ joss $\forall\ i \in \mathbb{N}$ $x \in \bigcup_{j \geq i}^{\infty} E_j$ joss $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j \geq i}^{\infty} E_j$. Siis $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j$ ja tämä joukko on mitallisten joukkojen numeroituvien yhdisteiden numeroituvana leikkauksena mitallinen.

Käyttämällä mitan μ monotonisuutta ja subadditiivisuutta saadaan

$$\mu(E) \leq \mu(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j \geq i}^{\infty} \mu(E_j) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Oikeanpuoleisin termi suppenee kohti nollaa kun $i \to \infty$, sillä kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{i-1} \mu(E_n) + \sum_{n=i}^{\infty} \mu(E_n),$$

jossa $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i-1} \mu(E_n) < \infty$. Niinpä $\mu(E) = 0$.