MITTA JA INTEGRAALI - HARJOITUS 2 MALLIT

1. Osoita, että $\mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen ulkomitan m_n^* suhteen ja että $m_n(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Ratkaisu: Voidaan kirjoittaa $\mathbb{R}^n = \emptyset^c$, missä $\emptyset$ on mitallinen ja siis $\mathbb{R}^n$ on mitallinen. Ulkomitta $m_n^*(\mathbb{R}^n) = \infty$, sillä ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$m_n^*(\mathbb{R}^n) \geq m_n^*([0,i]^n) = m_n^*(i[0,1]^n) = i^n m_n^*([0,1]^n) = i^n$$

jokaisella $i \in \mathbb{N}$.

2. Olkoon $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}_n$ jono mitallisia osajoukkoja, joille $m(E_i \cap E_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Näytä, että

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Ratkaisu: Olkoon $A = \bigcup\{E_i \cap E_j : \; i,j \in \mathbb{N}, \; i \neq j\}$. Huomaa, että A on 0-mittaisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä 0-mittainen. Asetetaan $F_i = E_i \setminus A$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Huomaa, että

(1) $F_i \cap F_j = \emptyset = F_i \cap A$ kun $i,j \in \mathbb{N}, \; i \neq j$.

(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

(3) $m(E_i) = m(F_j)$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$.

Käyttämällä mitan σ-additiivisuutta saadaan

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m(A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = m(A) + \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

3. Olkoon I indeksijoukko sekä reaaliluvut $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$. Näytä: jos summa $\sum_{i \in I} a_i < \infty$ niin joukko $I_0 = \{i \in I : \; a_i > 0\}$ on numeroituva.

Ratkaisu: Olkoon $J_k = \{i \in I : \; a_i > k^{-1}\}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Tällöin ehdosta $\sum_{i \in I} a_i < \infty$ seuraa että J_k on äärellinen, sillä jos J_k olisi ääretön niin silloin $\sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{i \in J_k} a_i \geq \sum_{i \in J_k} k^{-1} = \infty$. Nyt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$ on numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista ja on siten numeroituva. Huomaa että $I_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$.

4. Oletamme joukosta $A \subset \mathbb{R}^n$ että kaikilla $x \in A$ on olemassa sellainen avoin pallo $B(x, r_x)$, jolle $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$. Osoita, että A on mitallinen joukko ja että $m(A) = 0$. [Taikasanat: Lindelöf ja subadditiivinen].

Ratkaisu: Valitaan jokaiselle $x \in A$ positiivinen luku r_x kuten tehtävänannossa. Selvästi $\{B(x, r_x) : \ x \in A\}$ on A:n avoin peite. Lindelöfin lauseen mukaan on tällä peitteellä olemassa numeroituva osapeite, jota merkitsemme $\{B(x_n, r_{x_n}) : \ n \in \mathbb{N}\}$. Siis $A = A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_{x_n}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B(x_n, r_{x_n})$. Oletuksen mukaan $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$ jokaisella $x \in A$. Käyttämällä ulkomitan subadditiivisuutta saadaan

$$m^*(A) = m^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B(x_n, r_{x_n})) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A \cap B(x_n, r_{x_n})) = 0.$$

Niinpä $m^*(A) = 0$ ja siten A on mitallinen.

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Palautetaan mieleen että joukon A *sisus*

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup \{V \subset \mathbb{R}^n : \ V \subset A, \ V \text{ avoin}\}$$

ja *sulkeuma*

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \inf_{a \in A} |x - a| = 0\}.$$

Merkitään *reunaa* $\partial(A) = \overline{A} \backslash \mathrm{int}(A)$. Näytä: jos ulkomitta $m^*(\partial(A)) = 0$, niin A on Lebesgue-mitallinen. Anna esimerkki mitallisesta joukosta $A \subset [0, 1]$, jolle $m(A) = m^*(\partial(A^c)) = 1$.

Huom: Tehtävän ensimmäisessä versiossa oli painovirhe.

Ratkaisu: Joukko $\mathrm{int}(A)$ on avoin (helppo nähdä / ks. Topo I) ja siis mitallinen. Koska $A \subset \overline{A}$ riittää todeta että myös osajoukko $A \cap \partial(A)$ on mitallinen. Tällöinhän nimittäin A voidaan lausua yhdisteenä mitallisista joukoista $\mathrm{int}(A)$ ja $A \cap \partial(A)$. Mutta jälkimmäinenkin joukko on mitallinen, sillä se sisältyy oletuksen nojalla 0-mittaiseen joukkoon $\partial(A)$.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen osajoukko, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $G_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ jolle pätee

$$A \subset G_\epsilon \ \text{ ja } \ m^*(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon.$$

Näytä, että A on Lebesgue-mitallinen joukko. [Vihje: Tutki joukkoa $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_{k^{-1}}$.]
Lisätieto: Tämä on eräs vaihtoehtoinen määritelmä Lebesgue-mitallisuudelle.

Ratkaisu: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen joukko, jolle jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on olemassa avoin joukko $G_k \subset \mathbb{R}^n$, siten että $A \subset G_k$ ja $m^*(G_k \setminus A) < k^{-1}$. Kiinnitetään tällainen jono avoimia joukkoja (G_k). Ulkomitan monotonisuudesta seuraa että $m^*(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \setminus A) \leq m^*(G_k \setminus A) < k^{-1}$ jokaisella k, siis $m^*(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \setminus A) = 0$. Huomaa että $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k$ on mitallisten joukkojen numeroituvana leikkauksena mitallinen ja toisaalta $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \setminus A$ on 0-mittaisena joukkona mitallinen. Siis $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \setminus (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \setminus A)$ on mitallisten joukkojen erotuksena mitallinen.