MITTA JA INTEGRAALI - HARJOITUS 1 MALLIT

1. Heität ohutkärkistä tikkaa umpimähkään euklidisen tason yksikköpalloon. Millä todennäköisyydellä osut origoon? Perustele näkemyksesi ja täsmennä kysymystä tarvittaessa.

Ratkaisu: Ryhmissä keskusteltiin kysymyksestä. Kaikissa mainituissa ratkaisuissa oli oletettu tasainen todennäköisyysjakauma jonka suhteen pisteen 0 (todennäköisyys)mitta on 0.

2. Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus ja $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ joukkoperhe X:ssä. Näytä, että

$$f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(V_\gamma).$$

Etsi esimerkki aidosta inkluusiosta.

Ratkaisu: Jos $y \in f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma)$ niin on olemassa $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$, jolle $f(x) = y$. Tällöin $y \in f(V_\gamma)$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$, joten $y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(V_\gamma)$.

Olkoon $f\colon \{0,1\} \to \{0\}$ kuvaus, $V_1 = \{0\}$ ja $V_2 = \{1\}$. Tällöin $f(\bigcap_i V_i) = \emptyset \neq \bigcap_i f(V_i) = \{0\}$.

3. Olkoon $\mathcal{A} = \{A \subset [0,1] :\ A \text{ tai } [0,1] \setminus A \text{ numeroituva}\}$.
(i) Onko $\mathcal{A}$ sigma-algebra?
(ii) Onko mahdollista määritellä tn-mitta $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ siten että $\mu(\{x\}) = 0$ jokaisella $x \in [0,1]$?
(iii) Voidaanko μ valita kuten kohdassa (ii) mutta lisäksi niin että $\mu(A) = \frac{1}{2}$ jollain $A \in \mathcal{A}$?

Ratkaisu: (i) On. $\emptyset$ on numeroituva, siis $\emptyset \in \mathcal{A}$. Selvästi jos $A \in \mathcal{A}$ niin $A^c \in \mathcal{A}$. Olkoon (A_i) jono $\mathcal{A}$:n alkioita. Jos on olemassa i_0 jolle A_{i_0} on ylinumeroituva niin $(\bigcup_i A_i)^c \subset A_{i_0}^c$ ja selvästi $(\bigcup_i A_i)^c$ on numeroituva, eli $\bigcup_i A_i$ kuuluu joukkoon $\mathcal{A}$. Jos taas jokainen A_i on numeroituva niin $\bigcup_i A_i$ on numeroituva eli kuuluu joukkoon $\mathcal{A}$. Siis $\mathcal{A}$ on σ-algebra.

(ii) Asetetaan $\mu(A) = 1$ jos A^c numeroituva ja $\mu(A) = 0$ jos A numeroituva. Tällöin $\mu(\emptyset) = 0$. Olkoon (A_i) jono $\mathcal{A}$:n alkioita, jotka ovat joukkoina erillisiä. Jos kaikki A_i:t ovat numeroituvia niin $\bigcup A_i$ on numeroituva ja siis $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i) = \sum_i 0 = 0$. Olkoon $A, B \in \mathcal{A}$ siten että $A \cap B = \emptyset$ ja A^c numeroituva. Tällöin $A^c \cup B^c = [0,1]$, siis B^c on ylinumeroituva. Tämä tarkoittaa sitä että jokaisessa jonossa $(A_i) \subset \mathcal{A}$ pistevieraita joukkoja on korkeintaan 1 ylinumeroituva joukko. Olkoon (A_i) tällainen jono, jossa merkitsemme A_{i_0} ylinumeroituvaa joukkoa. Selvästi $(\bigcup_i A_i)^c$ on numeroituva ja siis $\mu(\bigcup_i A_i) = 1 = \sum_i \mu(A_i) = \mu(A_{i_0}) + 0$. Koska jokainen yksiö on numeroituva on yksiön mitta siten 0.

(iii) Ei. Vastaoletus: Olkoon $A \in \mathcal{A}$ siten että $\mu(A) = \mu(A^c) = \frac{1}{2}$. Tällöin joko A tai A^c on numeroituva. Symmetrian perusteella voidaan olettaa, että A on numeroituva ja kirjoitetaan $(x_n) = A$. Tällöin mitan μ σ-additiivisuuden nojalla pätee $0 = \sum_n \mu(\{x_n\}) = \mu(\bigcup_n \{x_n\}) = \mu(A)$, mikä antaa ristiriidan sen kanssa että $\mu(A) = \frac{1}{2}$.

4. Olkoon $A \subset [0,1]$ niiden pisteiden x joukko, joilla on desimaalikehitelmä $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, missä $a_n \neq 9$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.
(i) Onko A numeroituva?
(ii) Laske $m_1^*(A)$.

Ratkaisu: (i) A on ylinumeroituva sillä on olemassa injektio binäärijonojen joukolta $B = \{\ \theta \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \}$ joukolle A. Injektion antaa kuvaus $B \to A;\ \theta \mapsto 0, \theta(1)\theta(2)\theta(3)....$ Binäärijonojen joukko on puolestaan (tunnetusti) ylinumeroituva. Tämän voi nähdä esim. käyttämällä Cantorin diagonaaliargumenttia (monisteen s. 6) missä desimaalit korvataan nollilla ja ykkösillä.

(ii) $m_1^*(A) = 0$. Olkoon $A_n = \{0, a_1 a_2 a_3 ... :\ \ a_i \neq 9 \text{ kun } i \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Huomataan että $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset \bigcap_i A_i = A$. Näytämme että $m^*(A_n) = (\frac{9}{10})^n$ kaikilla n. Tällöin ulkomitan monotonisuus antaa $m^*(A) \leq \lim_{n\to\infty} m^*(A_n) = 0$.

Voidaan kirjoittaa

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{a \in \{0,1,\ldots,10^i - 1\}} [a10^{-i}, a10^{-i} + \frac{9}{10}10^{-i}).$$

Selvästi $m^*(A_1) = \ell(A_1) = \frac{9}{10}$. Huomaa, että jos ylläolevilla notaatioilla

$$[a10^{-i}, a10^{-i} + \frac{9}{10}10^{-i}) \cap \bigcup_{a \in \{0,1,\ldots,10^j - 1\}} [a10^{-j}, a10^{-j} + \frac{9}{10}10^{-j}) \neq \emptyset$$

jollain $j < i$, niin tällöin

$$[a10^{-i}, a10^{-i} + \frac{9}{10}10^{-i}) \subset \bigcup_{a \in \{0,1,\ldots,10^j - 1\}} [a10^{-j}, a10^{-j} + \frac{9}{10}10^{-j}).$$

Toisaalta

$$[a10^{-i}, a10^{-i} + \frac{9}{10}10^{-i}) \cap \bigcup_{b \in \{0,1,\dots,10^{i+1}-1\}} [b10^{-(i+1)}, b10^{-(i+1)} + \frac{9}{10}10^{-(i+1)})$$

$$= \bigcup_{c \in \{0,8\}} [a10^{-i} + c10^{-(i+1)}, a10^{-i} + c\frac{9}{10}10^{-(i+1)}).$$

Näistä seikoista päätellään, että $m^*(A_{n+1}) = \frac{9}{10}m^*(A_n)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

5. Olkoon $C = \{(t,s) \in [-1,1] \times [-1,1] : \; |t| + |s| \leq 1\}$. Laske $m_2^*(C)$. Saat käyttää monisteen Lemmaa 1.35.

Ratkaisu: Olkoon $\mathcal{I}_n$ joukko välejä muotoa $[-1 + \frac{i}{n}, 1 - \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ja $[-1+\frac{i}{n}, 1-\frac{i}{n}] \times [\frac{-i}{n}, \frac{-i+1}{n}]$, missä $1 \leq i \leq n$. Huomaa, että $m^*(\bigcup \mathcal{I}_n) \leq m^*(A)$ jokaisella n ulkomitan monotonisuuden perusteella. Toisaalta $m^*(\bigcup \mathcal{I}_n) = \ell(\mathcal{I}_n)$ sillä väleillä ei ole yhteisiä sisäpisteitä (Lemma 1.35). Saadaan

$$\ell(\mathcal{I}_n) = 2\sum_{i=1}^{n} 2(1 - \frac{i}{n})\frac{1}{n} = 2n2\frac{(1-\frac{1}{n})+0}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Tällöin $m^*(C) \geq \ell(\bigcup \mathcal{I}_n) \to 2$ kun $n \to \infty$.

Vastaavasti asetetaan $\mathcal{J}_n$ kokoelmaksi välejä $[-1 + \frac{i-1}{n}, 1 - \frac{i-1}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ja $[-1+\frac{i-1}{n}, 1-\frac{i-1}{n}] \times [\frac{-i}{n}, \frac{-i+1}{n}]$, missä $1 \leq i \leq n$. Tällöin $C \subset \bigcup \mathcal{J}_n$ jokaisella n. Vastaavasti saadaan $m^*(C) \leq \ell(\mathcal{J}_n) \to 2$ kun $n \to \infty$. Siis $m^*(C) = 2$.

6. Näytä että m_2^* on tasossa $\frac{\pi}{2}$-kierron suhteen invariantti.

Ratkaisu: Määritellään lineaarikuvaus $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla $\alpha(ae_1 + be_2) = -be_1 + ae_2$. Huomaa, että jokaisella suorakaiteella I pätee $\ell(I) = \ell(\alpha(I))$. Huomaa, että $\mathcal{F}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^2$ Lebesguen peite jos ja vain jos $\alpha(\mathcal{F}) = \{\alpha(I) : \; I \in \mathcal{F}\}$ on $\alpha(A)$:n Lebesguen peite ja lisäksi $\ell(\mathcal{F}) = \ell(\alpha(\mathcal{F}))$. Käytämme tietoa että α on bijektio Lebesguen peitteiden joukolta itselleen. Siis

$$\begin{aligned} m_2^*(\alpha(A)) &= \inf_{\alpha(\mathcal{F})} \ell(\alpha(\mathcal{F})) \\ &= \inf_{\mathcal{F}} \ell(\mathcal{F}) = m_2^*(A). \end{aligned}$$

Yllä infimumit otetaan $\alpha(A)$:n ja vast. A:n Lebesguen peitteiden yli.