Mitta ja Integraali
Harjoitus 6
8.6.-13.6. 2009

1. Laske

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\sin(nx)e^{-nx^2}\ dx.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ kompakti joukko ja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integroituva funktio. Merkitään $A+n=\{a+n:\ a\in A\}$ jokaisella $n\in\mathbb{N}$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A+n} f = 0.$$

3. Näytä 'laskeva versio' monotonisen konvergenssin lauseesta: Jos $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \ldots$ on jono mitallisia positiivisia funktioita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja f_1 on integroituva, niin

$$\lim_{i\to\infty}\int f_i = \int \lim_{i\to\infty} f_i.$$

4. Laske

$$\int_{x=(x_1,x_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}} \sin(x_1)e^{-x_2^2}\ dx.$$

5. Olkoon $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ kuvaus $f(x,y)=e^{-xy}-2e^{-2xy}$ kun $0<x<1,\ y>1$ ja $f(x,y)=0$ muulloin. Totea, että

$$\int_0^1\Big(\int_1^\infty f(x,y)\ dy\Big)dx > 0, \quad \int_1^\infty\Big(\int_0^1 f(x,y)\ dx\Big)dy < 0.$$

Miten tämä liittyy Fubinin lauseeseen?

6. Olkoon $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ positiivinen mitallinen kuvaus ja merkitään $\phi(t) = m(\{x\in\mathbb{R}^n:\ f(x)>t\})$ jokaisella $t\in[0,\infty)$. Osoita, että

$$\int_0^\infty \phi(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

[Vihje: Fubini.]

Nämä tehtävät liittyvät monisteen sivuihin 60-71.