Mitta ja Integraali
Harjoitus 5
5.6.-8.6. 2009

1. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko, $m(E) < \infty$ ja olkoon $f\colon E \to \mathbb{R}$ rajoitettu mitallinen positiivinen kuvaus. Tarkista että

$$m(E) \inf_{x \in E} f(x) \leq \int_E f \leq m(E) \sup_{x \in E} f(x).$$

2. Onko olemassa sellaista mitallista funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f > 0$, että f ja $\frac{1}{f}$ ovat integroituvia yli $\mathbb{R}$:n.

3. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja ja $1 \leq k \leq n$. Oletamme, että jokainen piste $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu korkeintaan k:n moneen joukkoon A_i. Näytä että joukolle $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ on voimassa arvio

$$m(A) \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

[Vihje: Kirjoita karakterististen funktioiden avulla ja integroi.]

4. Laske raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\, dx$, missä $0 < s < 1$.

5. Olkoon $E_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, mitallisia ja erillisiä joukkoja, sekä $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja positiivinen. Osoita, että

$$\int_{\bigcup_i E_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f.$$

6. Olkoon $1 \leq p < \infty$, ja $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, mitallisia kuvauksia. Oletamme lisäksi, että on olemassa $\lim_{i\to\infty} f_i(x) := f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja että on olemassa sellainen vakio $M < \infty$, jolle

$$\int |f_i|^p \leq M \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että $\int |f|^p \leq M$. [Vihje: Fatoun lemma puree.]

Tässä funktio f "positiivinen" voidaan lukea "ei-negatiivinen", ts. $f \geq 0$. Nämä tehtävät liittyvät monisteen sivuihin 43-59.