Mitta ja Integraali
Harjoitus 4
1.6.-5.6. 2009

1. Laske $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n + \frac{1}{n}$ ja $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n + \frac{1}{n}$.

2. Olkoon $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ rajoitettuja jonoja. Näytä että

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \ge \liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

3. Olkoon $F_\sigma = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i : \ F_i \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu } \forall i \in \mathbb{N}\}$ ja $G_\delta = \{\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i : V_i \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin } \forall i \in \mathbb{N}\}$. Osoita, että nämä joukot sisältyvät $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukkoihin.

4. Olkoon $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallisia kuvauksia. Näytä että tulokuvaus $fg$ on mitallinen.

5. Näytä että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen jos $f^{-1}((-\infty, q))$ on mitallinen jokaisella $q \in \mathbb{Q}$.

6. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaus. Osoita, että kuvauksen $f$ jatkuvuuspisteiden joukko $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f \text{ jatkuva pisteessa } x\}$ on Lebesgue-mitallinen. [Ohje: verifioi että $A$ on leikkaus joukoista

$$G_k = \bigcup\{G \subset \mathbb{R}^n : \ G \text{ avoin}, \ |f(x) - f(y)| < \frac{1}{k} \ \forall x, y \in G\}.]$$

Nämä tehtävät liittyvät monisteen sivuihin 34-43.