Mitta ja Integraali
Harjoitus 3
29.5.-2.6. 2009

1. Olkoon $A = \{(s,t) \in [-1,1]^2 : \; s^2 + t^2 > 1\}$.
   (i) Onko A mitallinen mitan m_2 suhteen?
   (ii) Laske $m_2^*(A)$.

2. Olkoon $A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \; s \in [0,1], \; 0 \leq t < e^s\}$.
   (i) Onko A mitallinen mitan m_2 suhteen?
   (ii) Laske $m_2^*(A)$.

3. Näytä että $m_*(A) \leq m^*(A)$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$.
   (Katso lisämateriaali kurssin nettisivuilla.)

4. Näytä Lause 1.64: $E \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen jos ja vain jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa Lebesgue-mitalliset $A, B \subset \mathbb{R}^n$ siten että $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \epsilon$.

5. Anna esimerkki joukosta $A \subset \mathbb{R}^n$ joka ei ole mitallinen mitan m_n suhteen.

6. Näytä Borel-Cantelli lemma: Olkoon (Ω, Σ, μ) mitta-avaruus, $(E_n) \subset \Sigma$ jono μ-mitallisia joukkoja ja

$$E = \{x \in \Omega : \; \#\{j \in \mathbb{N} : \; x \in E_j\} = \infty\}.$$

(Yllä # on joukon mahtavuus.) Tällöin ehdosta $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(E_j) < \infty$ seuraa että $\mu(E) = 0$. (Vihje: Tarkista ensin että $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j$.)

Nämä tehtävät liittyvät monisteen sivuihin 26-34.