Mitta ja Integraali
Harjoitus 2
26.5.-2.6. 2009

1. Osoita, että $\mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen ulkomitan $m_n^*$ suhteen ja että $m_n(\mathbb{R}^n) = \infty$.

2. Olkoon $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}_n$ jono mitallisia osajoukkoja, joille $m(E_i \cap E_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Näytä, että

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

3. Olkoon $I$ indeksijoukko sekä reaaliluvut $a_i \geq 0$ kaikilla $i \in I$. Näytä: jos summa $\sum_{i \in I} a_i < \infty$ niin joukko $I_0 = \{i \in I : \ a_i > 0\}$ on numeroituva.

4. Oletamme joukosta $A \subset \mathbb{R}^n$ että kaikilla $x \in A$ on olemassa sellainen avoin pallo $B(x, r_x)$, jolle $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$. Osoita, että $A$ on mitallinen joukko ja että $m(A) = 0$. [Taikasanat: Lindelöf ja subadditiivinen]. (Vanha koetehtävä).

5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Palautetaan mieleen että joukon $A$ *sisus*

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup \{V \subset \mathbb{R}^n : \ V \subset A, \ V \text{ avoin}\}$$

ja *sulkeuma*

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \inf_{a \in A} |x - a| = 0\}.$$

Merkitään *reunaa* $\partial(A) = \overline{A} \backslash \mathrm{int}(A)$. Näytä: jos ulkomitta $m^*(\partial(A)) = 0$, niin $A$ on Lebesgue-mitallinen. Anna esimerkki mitallisesta joukosta $A \subset [0, 1]$, jolle $m(A) = m^*(\partial(A^c)) = 1$.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ sellainen osajoukko, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko $G_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ jolle pätee

$$A \subset G_\epsilon \ \text{ ja } \ m^*(G_\epsilon \setminus A) < \epsilon.$$

Näytä, että $A$ on Lebesgue-mitallinen joukko. [Vihje: Tutki joukkoa $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_{k^{-1}}$.]
Lisätieto: Tämä on eräs vaihtoehtoinen määritelmä Lebesgue-mitallisuudelle.

Nämä tehtävät liittyvät monisteen sivuihin 16-26.